Corso di laurea in Matematica
Sistemi dinamici – Primo Modulo

Prova d'esonero del'11-11-99

CORREZIONE

<u>Esercizio 1.</u>

Il polinomio caratteristico dell'operatore lineare A è

$$
\begin{aligned}
p(\lambda) &= (1-\lambda)\left[(2-\lambda)^2-1\right] - [(2-\lambda)-1] + [1-(2-\lambda)] \\
&= (1-\lambda)\left[(2-\lambda)^2-1\right] - (1-\lambda) - (1-\lambda) \\
&= (1-\lambda)\left[(2-\lambda)^2-3\right] = 0 \, ,
\end{aligned}
$$

così che lo spettro di A è costituito dagli autovalori

$$\lambda_1 = 1 \, , \qquad \lambda_2 = 2-\sqrt{3} \, , \qquad \lambda_3 = 2+\sqrt{3} \, .$$

I corrispondenti autovettori v_1, v_2, v_3 sono i vettori le cui componenti x, y, z sono determinate dal sistema di equazioni

$$\begin{cases} (1-\lambda)\,x + y + z = 0 \, , \\ x + (2-\lambda)\,y + z = 0 \, , \\ x + y + (2-\lambda)\,z = 0 \, . \end{cases}$$

Per $\lambda = 1$ otteniamo

$$\begin{cases} y + z = 0 \, , \\ x + y + z = 0 \, , \end{cases}$$

da cui si ricava $x = 0$ e $z = -y$; possiamo dunque porre $y = 1$, così da avere $v_1 = (0, 1, -1)$.

Per $\lambda = 2-\sqrt{3}$ otteniamo

$$\begin{cases} \left(\sqrt{3}-1\right)x + y + z = 0 \, , \\ x + \sqrt{3}y + z = 0 \, , \\ x + y + \sqrt{3}z = 0 \, ; \end{cases}$$

la differenza tra le ultime due dà $y = z$, così che, dalla seconda, si ottiene $x + \left(\sqrt{3}+1\right)y = 0$; fissato $y = 1$ si ha allora $x = -1-\sqrt{3}$, quindi $v_2 = (-1-\sqrt{3}, 1, 1)$.

Per $\lambda = 2+\sqrt{3}$ otteniamo

$$\begin{cases} \left(-\sqrt{3}-1\right)x + y + z = 0 \, , \\ x - \sqrt{3}y + z = 0 \, , \\ x + y - \sqrt{3}z = 0 \, ; \end{cases}$$

e si può ragionare come nel caso $\lambda = 2-\sqrt{3}$: si trova $v_3 = (-1+\sqrt{3}, 1, 1)$.

Riassumendo si ha quindi

$$\begin{cases} \lambda_1 = 1 & \to \quad v_1 = (0, 1, -1) \, , \\ \lambda_2 = 2-\sqrt{3} & \to \quad v_2 = (-1-\sqrt{3}, 1, 1) \, , \\ \lambda_3 = 2+\sqrt{3} & \to \quad v_3 = (-1+\sqrt{3}, 1, 1) \, . \end{cases}$$

Si ha quindi
$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} , \qquad P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1-\sqrt{3} & 1 & 1 \\ -1+\sqrt{3} & 1 & 1 \end{pmatrix} ,$$
se $\{e_1, e_2, e_3\}$ è la base standard in cui l'operatore lineare che definisce il sistema dinamico è rappresentato dalla matrice A.

Siano y le coordinate nella base definita dagli autovettori $\{v_1, v_2, v_3\}$. Si ha allora
$$y = Qx , \qquad Q^{-1} = P^T .$$

Quindi
$$Q^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1-\sqrt{3} & -1+\sqrt{3} \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} .$$

Nella base $\{v_1, v_2, v_3\}$ il sistema di equazioni diventa
$$\dot{y}_i = \lambda_i y_i , \qquad i = 1, 2, 3 ,$$
così che la soluzione è data da
$$\begin{cases} y_1(t) = e^t y_{01} , \\ y_2(t) = e^{(2-\sqrt{3})t} y_{02} , \\ y_3(t) = e^{(2+\sqrt{3})t} y_{03} , \end{cases}$$
dove $y_0 = (y_{01}, y_{02}, y_{03}) = Qx_0$ è il dato iniziale nelle coordinate y. Si ha quindi
$$x(t) = Q^{-1} y(t) ,$$
che, espressa per componenti, dà
$$\begin{cases} x_1(t) = -\left(\sqrt{3}+1\right) e^{(2-\sqrt{3})t} y_{02} + \left(\sqrt{3}-1\right) e^{(2+\sqrt{3})t} y_{03} , \\ x_2(t) = e^t y_{01} + e^{(2-\sqrt{3})t} y_{02} + e^{(2+\sqrt{3})t} y_{03} , \\ x_3(t) = -e^t y_{01} + e^{(2-\sqrt{3})t} y_{02} + e^{(2+\sqrt{3})t} y_{03} . \end{cases}$$
Imponendo le condizioni iniziali si trova
$$\begin{cases} x_1(0) = -\left(\sqrt{3}+1\right) y_{02} + \left(\sqrt{3}-1\right) y_{03} = -2 , \\ x_2(0) = y_{01} + y_{02} + y_{03} = 4 , \\ x_3(0) = -y_{01} + y_{02} + y_{03} = 0 , \end{cases}$$
che si risolve facilmente. Infatti sommando e sottraendo le ultime due equazioni si trova
$$\begin{cases} y_{02} + y_{03} = 2 , \\ y_{01} = 2 , \end{cases}$$
e inserendo la relazione $y_{02} + y_{03} = 2$ nella prima equazione si ha
$$y_{02} - y_{03} = 0 .$$
Quindi, in conclusione,
$$\begin{cases} y_{01} = 2 , \\ y_{02} = 1 , \\ y_{03} = 1 . \end{cases}$$

Alternativamente si può calcolare Q come l'inversa di Q^{-1}, ottendendo

$$Q = \frac{1}{4\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 0 & 2\sqrt{3} & -\sqrt{3} \\ -2 & \sqrt{3}-1 & \sqrt{3}-1 \\ 2 & \sqrt{3}+1 & \sqrt{3}+1 \end{pmatrix} ,$$

e determinare y_0 come

$$y_0 = Q x_0 ;$$

si trova quindi

$$\begin{pmatrix} y_{01} \\ y_{02} \\ y_{03} \end{pmatrix} = \frac{1}{4\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 0 & 2\sqrt{3} & -\sqrt{3} \\ -2 & \sqrt{3}-1 & \sqrt{3}-1 \\ 2 & \sqrt{3}+1 & \sqrt{3}+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{4\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 8\sqrt{3} \\ 4+4\sqrt{3}-4 \\ -4+4\sqrt{3}+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Si può allora scrivere la soluzione come

$$\begin{cases} x_1(t) = -\left(\sqrt{3}+1\right) e^{(2-\sqrt{3})t} + \left(\sqrt{3}-1\right) e^{(2+\sqrt{3})t} , \\ x_2(t) = 2e^t + e^{(2-\sqrt{3})t} + e^{(2+\sqrt{3})t} , \\ x_3(t) = -2e^t + e^{(2-\sqrt{3})t} + e^{(2+\sqrt{3})t} . \end{cases}$$

Esercizio 2.

(2.1) Si cercda se esiste una funzione $H = H(x, y)$ tale che

$$\begin{cases} \dot{x} = 4y\left(1-y^2\right) = \partial H/\partial y , \\ \dot{y} = -2x = -\partial H/\partial x . \end{cases}$$

Integrando $\dot{x}$ rispetto a y si ottiene

$$H(x, y) = 2y^2 - y^4 + c_1(x) ,$$

dove $c_1(x)$ è una funzione che dipenderà dalla sola variabile x; integrando $-\dot{y}$ rispetto a x si ottiene

$$H(x, y) = x^2 + c_2(y) ,$$

dove $c_2(y)$ è una funzione che dipenderà dalla sola variabile y. Imponendo che le due espressioni trovate siano uguali si trova

$$H(x, y) = 2y^2 - y^4 + c_1(x) = x^2 + c_2(y) ,$$

che fissa $c_1(x) = x^2 + c_1$ e $c_2(y) = 2y^2 - y^4 + c_2$, con c_1, c_2 costanti. Quindi

$$H(x, y) = x^2 + 2y^2 - y^4 + c ,$$

per qualche costante (arbitraria) c. Si può scegliere per comodità $c = -1$, così che

$$H(x, y) = x^2 - \left(y^4 - 2y^2 + 1\right) = x^2 - \left(y^2 - 1\right)^2 ,$$

i.e. si trova l'espressione

$$H(x, y) = x^2 - \left(y^2 - 1\right)^2$$

per la costante del moto.

(2.2) Le curve di livello di $H(x, y) = 0$ dipendono ovviamente dal valore della costante c scelto. Per $c = -1$ le curve di livello

$$\Gamma_0 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ H(x, y) = 0 \right\}$$

sono date dalle due parabole $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ definite, rispettivamente, dalle equazioni

$$\begin{cases} \mathcal{C}_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x = y^2 - 1\} \ , \\ \mathcal{C}_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x = 1 - y^2\} \ , \end{cases}$$

che si intersecano nei due punti $(0, 1)$ e $(0, -1)$. Tali curve di livello conterranno 8 traiettorie: i 2 punti d'intersezione delle due parabole devono essere ovviamente punti d'equilibrio, altrimenti sarebbe violato il Teorema di unicità; per lo stesso motivo possiamo anche concludere che i 6 archi di curva separati dai punti d'equilibrio sono 6 traiettorie distinte.

I versi di percorrenza si possono determinare a partire dalle equazioni che definiscono il sistema, tenendo conto che si ha $x = y^2 - 1$ su $\mathcal{C}_1$ e $x = -y^2 + 1$ su $\mathcal{C}_2$.

Quindi per dati iniziali $(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathcal{C}_1$ si ha in ogni istante

$$\dot{y} = -2 \left(y^2 - 1 \right) \ ,$$

mentre per dati iniziali $(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathcal{C}_2$ si ha in ogni istante

$$\dot{y} = 2 \left(y^2 - 1 \right) \ ,$$

Quindi i versi di percorrenza sono i seguenti. Sulla curva $\mathcal{C}_1$ il moto è asintotico verso il punto $(0, 1)$ per $t \to \infty$ e verso il punto $(0, -1)$ per $t \to -\infty$, mentre sulla curva $\mathcal{C}_2$ il moto è asintotico verso il punto $(0, -1)$ per $t \to \infty$ e verso il punto $(0, 1)$ per $t \to -\infty$.

Se si fosse scelto un diverso valore di c, si sarebbero dovute graficare le curve

$$\Gamma_0^{(c)} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + 2y^2 - y^4 + c = 0 \right\} \ ,$$

che si riducono a quelle precedentemente studiate solo per $c = -1$.

(2.3) I punti d'equilibrio sono i punti in cui si annulla il campo vettoriale: perché (x_0, y_0) sia un punto d'equilibrio si deve quindi avere $x_0 = 0$ e $y_0 \left(y_0^2 - 1 \right) = 0$, che dà $y_0 = 0$ oppure $y_0 = \pm 1$. Riassumendo i punti d'equilibrio sono:

$$P_1 = (0, 0) \ , \qquad P_2 = (0, 1) \ , \qquad P_3 = (0, -1) \ .$$

(2.4) I punti P_2 e P_3 sono instabili, come dimostra l'analisi in (2.2), in particolare la discussione della direzione del moto lungo le curve $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$. Alternativamente la linearizzazione del sistema dinamico nell'intorno di un punto d'equilibrio x_0 dà

$$\dot{x} = A(x_0) \left(x - x_0 \right) \ ,$$

dove, sia per $x_0 = P_2$ sia per $x_0 = P_3$, risulta

$$A(x_0) = \begin{pmatrix} 0 & -8 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \ ,$$

che ammette due autovalori di cui uno positivo ($\lambda = 4$) e l'altro negativo ($\lambda = -4$).

Riguardo al punto $x_0 = P_1$ si ha

$$A(x_0) = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \ ,$$

che ammette autovalori con parte reale nulla ($\lambda = \pm i2\sqrt{2}$).

Per discutere la stabilità di P_1 possiamo applicare il Teorema di Ljapunov, usando come funzione di Ljapunov

$$W(x,y) = H(x,y) - H(0,0) \ ,$$

e concludere che P_1 è stabile. Infatti la funzione $W(x,y)$ verifica le proprietà

$$\begin{cases} W(0,0) = 0 \ , \\ W(x,y) > 0 \text{ in un intorno } B(0,0) \setminus \{(0,0)\} \ , \\ \dot{W}(x,y) = 0 \ . \end{cases}$$

(2.5) Il dato iniziale $(\bar{x}, \bar{y})$ si trova sulla curva $\mathcal{C}_1$. Quindi si ha

$$\dot{y} = -2\left(y^2 - 1\right)$$

lungo tutta la traiettoria. La componente $y(t)$ della soluzione è quindi data dall'equazione implicita

$$\int_{\bar{y}}^{y(t)} \frac{\mathrm{d}y}{y^2 - 1} = -2t \ ,$$

da cui, scrivendo

$$\frac{1}{y^2 - 1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{y-1} - \frac{1}{y+1}\right) \ ,$$

e tenendo conto che se $\bar{y} > 1$ si ha $y(t) > 1$ per ogni $t \in \mathbb{R}$, si ottiene

$$\log\frac{y(t) - 1}{y(t) + 1} - \log\frac{\bar{y} - 1}{\bar{y} + 1} = -4t \ ,$$

dove $\bar{y} = 2$. Quindi

$$\frac{y(t) - 1}{y(t) + 1} = \frac{1}{3}e^{-4t} \ ,$$

che risolta dà

$$y(t) = \frac{3 + e^{-4t}}{3 - e^{-4t}} \ .$$

Si noti che $y(t)$ è definita per $t \in (t_0, +\infty)$, con $t_0 = -(\log 3)/4$, e, come è immediato verificare, si ha

$$y(0) = \frac{3+1}{3-1} = 2 \ , \qquad \lim_{t\to\infty} y(t) = 1 \ , \qquad \lim_{t\to t_0} y(t) = +\infty \ ,$$

che torna con il disegno delle curve di livello in (2.2).

Corrispondentemente si ha

$$x(t) = y^2(t) - 1 = \left(\frac{3 + e^{-4t}}{3 - e^{-4t}}\right)^2 - 1 \ ;$$

si noti che

$$x(0) = 2^2 - 1 = 3 \ , \qquad \lim_{t\to\infty} x(t) = 0 \ , \qquad \lim_{t\to t_0} x(t) = +\infty \ .$$

Esercizio 3.

(3.1) L'unico punto d'equilibrio è $(0,0)$.

(3.2) Il sistema linearizzato corrispondente è

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \ ,$$

così che non fornisce informazioni.

Si vede però che

$$H(x,y) = x^6 + y^4 + y^2 + 2x^2y^2$$

è una costante del moto. Infatti, scrivendo

$$\begin{cases} \dot{x} = \partial H/\partial y \ , \\ \dot{y} = -\partial H/\partial x \ , \end{cases}$$

si trova

$$\begin{aligned} H(x,y) &= y^4 + 2x^2y^2 + y^2 + c_1(y) \\ &= x^6 + 2x^2y^2 + c_2(x) \ , \end{aligned}$$

dove $c_1(y)$ e $c_2(x)$ sono due funzioni che dipendono, rispettivamente, dalla sola y e dalla sola x. Quindi

$$H(x,y) = x^6 + y^4 + y^2 + 2x^2y^2 + c$$

è una costante del moto per ogni valore della costante c; in particolare si può porre $c = 0$.

Poiché $W(x,y) = H(x,y)$ è tale che

$$\begin{cases} W(0,0) = 0 \ , \\ W(x,y) > 0 \qquad \forall (x,y) \neq (0,0) \ , \\ \dot{W}(x,y) = 0 \ , \end{cases}$$

si può utilizzare $W(x,y) = H(x,y)$ come funzione di Ljapunov per concludere che $(0,0)$ è un punto d'equlibrio stabile.

<u>Esercizio 4.</u>

I Metodo.

Poiché $\dot{x} = 0$, si ha $x(t) = \bar{x} = 1$ per ogni $t \in \mathbb{R}$. L'equazione per y diventa quindi

$$\dot{y} = 1 + y \ ,$$

che può essere integrata immediatamente e dà

$$\log|1 + y(t)| - \log|1 + \bar{y}| = t \ .$$

Per $t = 0$ si ha $y(0) = \bar{y} = 0$, *i.e.* $1 + \bar{y} = 1 > 0$. Quindi per continuità si deve avere $1 + y(t) > 0$ per ogni t per cui la soluzione $y(t)$ è definita. Possiamo quindi eliminare i moduli: otteniamo quindi

$$\log(1 + y(t)) = \log(1 + \bar{y}) + t = t \ ,$$

che, risolta, dà

$$y(t) = e^t - 1 \ .$$

La soluzione è quindi

$$\begin{cases} x(t) = 1 \ , \\ y(t) = e^t - 1 \ . \end{cases}$$

II Metodo.

Definiamo

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \ ,$$

così che possiamo riscrivere il sistema nella forma

$$\dot{z} = Az \; , \qquad z = (x, y) \; .$$

Si ha

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = A \; ,$$

i.e.

$$A^2 = A \; .$$

Quindi

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!} = \mathbb{1} + A \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k}{k!} = \mathbb{1} + A \left(e^t - 1 \right) \; .$$

Quindi possiamo scrivere la soluzione come

$$z(t) = \left(\mathbb{1} + A \left(e^t - 1 \right) \right) \bar{z} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ e^t - 1 & e^t \end{pmatrix} \bar{z} \; ,$$

dove $\bar{z} = (\bar{x}, \bar{y}) = (1, 0)$, *i.e.* , per componenti,

$$\begin{cases} x(t) = \bar{x} \; , \\ y(t) = \left(e^t - 1 \right) \bar{x} + e^t \bar{y} \; , \end{cases}$$

che, nel caso delle condizioni iniziali particolari scelte, diventa

$$\begin{cases} x(t) = 1 \; , \\ y(t) = e^t - 1 \; . \end{cases}$$

III Metodo.

Definita la matrice A come sopra, il suo polinomio caratteristico è

$$\lambda \left(\lambda - 1 \right) = 0 \; ,$$

da cui si ricavano gli autovalori $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = 1$.

I corrispondenti autovettori sono

$$\begin{cases} \lambda_1 = 0 & \to \qquad v_1 = (1, -1) \; , \\ \lambda_2 = 1 & \to \qquad v_2 = (0, 1) \; , \end{cases}$$

poiché le equazioni che bisogna risolvere per determinarne le componenti (x, y) sono

$$\begin{cases} \lambda x = 0 \; , \\ x + (1 - \lambda) \, y = 0 \; . \end{cases}$$

Quindi

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} \; , \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \; ,$$

se $\{e_1, e_2\}$ è la base standard in cui l'operatore lineare che definisce il sistema dinamico è rappresentato dalla matrice A.

Si ha quindi

$$Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} , \qquad Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} .$$

Quindi, se

$$e^{Dt} \equiv \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^t \end{pmatrix} ,$$

si ha

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} &= Q^{-1} e^{Dt} Q \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ e^t & e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ e^t - 1 & e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned} ,$$

che dà

$$\begin{cases} x(t) = 1 , \\ y(t) = e^t - 1 . \end{cases}$$