

Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2008/2009

FM1 - Equazioni differenziali e meccanica

SECONDA PROVA D'ESONERO (04-06-2009)

CORREZIONE

ESERCIZIO 1. [8]

1.1. Trasformazione rigida. L'origine O' del sistema di riferimento mobile si muove lungo la parabola $y = y(x) = x^2$ con legge $x_{O'}(t) = t$. Quindi $y_{O'}(t) = t^2$ e il vettore \mathbf{r} che individua O' nel sistema di riferimento fisso è dato da

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = (t, t^2, 0).$$

L'angolo $\theta(t)$ che l'asse ξ del sistema mobile forma con l'asse x del sistema fisso è tale che

$$\tan \theta(t) = \frac{dy}{dx}(x_{O'}(t)) = 2t,$$

quindi C è la traslazione di \mathbf{r} e B è la rotazione di $\theta(t)$ intorno all'asse z , i.e.

$$B = B(t) = \begin{pmatrix} \cos \theta(t) & -\sin \theta(t) & 0 \\ \sin \theta(t) & \cos \theta(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

con $\theta(t) = \arctan 2t$.

1.2. Velocità assoluta. Nel sistema mobile si ha

$$\mathbf{Q}(t) = (0, \eta(t), 0),$$

per ipotesi. Nel sistema fisso si ha

$$\mathbf{q}(t) = B(t)\mathbf{Q}(t) + \mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} \cos \theta(t) & -\sin \theta(t) & 0 \\ \sin \theta(t) & \cos \theta(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \eta(t) \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t \\ t^2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin \theta(t) \eta(t) + t \\ \cos \theta(t) \eta(t) + t^2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

quindi

$$\mathbf{q}(t) = (-\sin \theta(t) \eta(t) + t, \cos \theta(t) \eta(t) + t^2, 0).$$

Le velocità assoluta è

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{q}} = \left(-\dot{\theta}(t) \cos \theta(t) \eta(t) - \sin \theta(t) \dot{\eta}(t) + 1, -\dot{\theta}(t) \sin \theta(t) \eta(t) + \cos \theta(t) \dot{\eta}(t) + 2t, 0 \right),$$

dove

$$\dot{\theta}(t) = \frac{2}{1 + 4t^2}.$$

1.3. Velocità relativa. Si ha

$$\mathbf{v}' = B(t)\dot{\mathbf{Q}}(t) = (-\sin\theta(t)\dot{\eta}(t), \cos\theta(t)\dot{\eta}(t), 0),$$

poiché $\dot{\mathbf{Q}}(t) = (0, \dot{\eta}(t), 0)$.

1.4. Componente traslatoria della velocità di trascinamento. Si ha

$$\mathbf{v}_0 = \dot{\mathbf{r}}(t) = (1, 2t, 0).$$

1.5. Componente rotatoria della velocità di trascinamento. Si ha $\mathbf{v}_T = [\boldsymbol{\omega}(t), \mathbf{q}(t) - \mathbf{r}(t)]$, quindi

$$\mathbf{v}_T = \det \begin{pmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ 0 & 0 & \dot{\theta}(t) \\ -\sin\theta(t)\eta(t) & \cos\theta(t)\eta(t) & 0 \end{pmatrix} = (-\dot{\theta} \cos\theta(t)\eta(t), -\dot{\theta} \sin\theta(t)\eta(t), 0),$$

ed è immediato verificare che $\mathbf{v}' + \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_T = \mathbf{v}$.

1.6. Moto. Perché il punto P si trovi in ogni istante sull'asse y nel sistema κ si deve avere $x(t) = 0$, ovvero (cfr. il punto 1.2)

$$-\sin\theta(t)\eta(t) + t = 0.$$

Ricordiamo che per $\theta \in (-\pi/2, \pi/2)$ si può scrivere

$$\sin\theta = \frac{\tan\theta}{\sqrt{1 + \tan^2\theta}}, \quad \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2\theta}}.$$

Si ha allora

$$\sin\theta(t) = \frac{\tan\theta(t)}{\sqrt{1 + \tan^2\theta(t)}} = \frac{2t}{\sqrt{1 + 4t^2}},$$

e quindi si deve avere

$$\eta(t) = \frac{t}{\sin\theta(t)} = \frac{1}{2}\sqrt{1 + 4t^2}.$$

Inoltre, in corrispondenza di tale moto, si ha (cfr. di nuovo il punto 1.2)

$$y(t) = \cos\theta(t)\eta(t) + t^2 = \frac{1}{\sqrt{1 + 4t^2}} \left(\frac{1}{2}\sqrt{1 + 4t^2} \right) + t^2 = \frac{1}{2} + t^2.$$

ESERCIZIO 2. Cfr. Cap. 4, §19, paragrafo 19.3.

ESERCIZIO 3.

3.1. Equazione del moto e sistema dinamico associato. Si ha

$$\begin{aligned} V(\theta) &= \sin^2\theta + \alpha \cos^4\theta, \\ V'(\theta) &= 2\sin\theta \cos\theta - 4\alpha \cos^3\theta \sin\theta = 2\sin\theta \cos\theta (1 - 2\alpha \cos^2\theta), \\ V''(\theta) &= 2\cos^2\theta - 2\sin^2\theta + 12\alpha \cos^2\theta \sin^2\theta - 4\alpha \cos^4\theta \\ &= 4\cos^2\theta - 2 + 12\alpha \cos^2\theta - 16\alpha \cos^4\theta, \end{aligned}$$

dove $\alpha \in \mathbb{R}$.

L'equazione del moto è allora

$$\ddot{\theta} = -V'(\theta) = -2 \sin \theta \cos \theta (1 - 2\alpha \cos^2 \theta),$$

e il sistema dinamico associato è

$$\begin{cases} \dot{\theta} = y, \\ \dot{y} = -2 \sin \theta \cos \theta (1 - 2\alpha \cos^2 \theta). \end{cases}$$

3.2. Punti d'equilibrio. I punti d'equilibrio hanno la forma $(\theta, v) = (\bar{\theta}, 0)$, dove $V'(\bar{\theta}) = 0$. Si ha $V'(\theta) = 0$ quando $\sin \theta = 0$ (quindi per $\theta = 0$ oppure $\theta = \pi$), oppure quando $\cos \theta = 0$ (quindi per $\theta = \pi/2$ oppure $\theta = -\pi/2$), oppure quando $\cos^2 \theta = 1/2\alpha$. L'ultima condizione può essere soddisfatta se e solo se $0 \leq 1/2\alpha \leq 1$, ovvero se e solo se $\alpha \geq 1/2$: se $\alpha = 1/2$ la condizione determina le due soluzioni già trovate $\theta = \pm\pi/2$, mentre se $\alpha > 1/2$ determina quattro nuove soluzioni $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$ tali che

$$-\pi < \theta_1 < -\frac{\pi}{2} < \theta_2 < 0 < \theta_3 < \frac{\pi}{2} < \theta_4 < \pi.$$

In conclusione, se $\alpha \leq 1/2$ si hanno i 4 punti d'equilibrio

$$\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right), \quad (0, 0), \quad \left(\frac{\pi}{2}, 0\right), \quad (\pi, 0),$$

mentre se $\alpha > 1/2$ si hanno gli 8 punti d'equilibrio

$$(\theta_1, 0), \quad \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right), \quad (\theta_2, 0), \quad (0, 0), \quad (\theta_3, 0), \quad \left(\frac{\pi}{2}, 0\right), \quad (\theta_4, 0), \quad (\pi, 0).$$

Si ha inoltre

$$\begin{aligned} V''(0) &= V''(\pi) = 2(1 - 2\alpha), \\ V''(\pi/2) &= V''(-\pi/2) = -2 \\ V''(\theta_1) &= V''(\theta_2) = V''(\theta_3) = V''(\theta_4) = 4 - \frac{2}{\alpha} = \frac{4}{\alpha} \left(\alpha - \frac{1}{2}\right). \end{aligned}$$

Quindi 0 e π sono punti di minimo per $\alpha < 1/2$ e punti di massimo per $\alpha > 1/2$; $\pm\pi/2$ sono sempre punti di massimo; se $\alpha > 1/2$ i punti $\theta_1, \dots, \theta_4$ sono punti di minimo. Se $\alpha = 1/2$ i punti 0 e π sono punti di minimo (per il teorema di Weierstrass).

Possiamo quindi concludere che per, $\alpha \leq 1/2$, i punti $(0, 0)$ e $(\pi, 0)$ sono punti di equilibrio stabile (per il teorema di Dirichlet), mentre i punti $(-\pi/2, 0)$ e $(\pi/2, 0)$ sono punti di equilibrio instabile, perché corrispondono a punti di massimo dell'energia potenziale.

Analogamente, per $\alpha > 1/2$, i punti $(\theta_k, 0)$, $k = 1, 2, 3, 4$, sono punti di equilibrio stabile, mentre i punti $(-\pi/2, 0)$, $(0, 0)$, $(\pi/2, 0)$ e $(\pi, 0)$ sono punti di equilibrio instabile.

3.3. Grafico dell'energia potenziale. Per studiare il grafico dell'energia potenziale studiamo separatamente i casi $\alpha \leq 1/2$ e $\alpha > 1/2$.

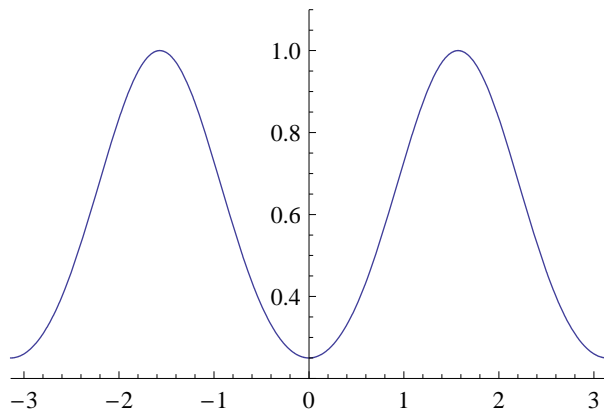


Figura 1. Grafico della funzione $V(\theta)$ per $\alpha < 1/2$.

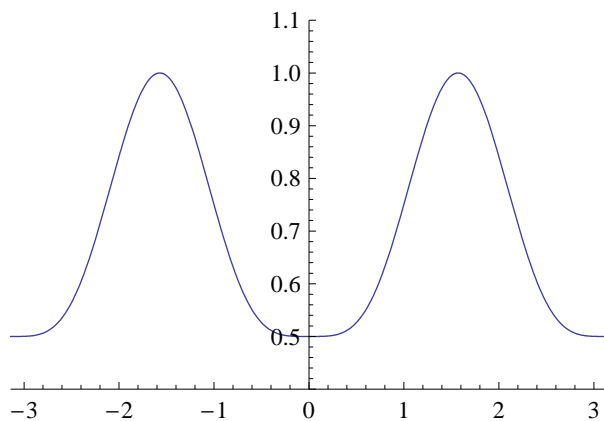


Figura 2. Grafico della funzione $V(\theta)$ per $\alpha = 1/2$.

Nel caso $\alpha < 1/2$ si ha il grafico rappresentato in Figura 1 (la figura corrisponde al valore $\alpha = 1/4$). Si noti che in tal caso si ha $V''(0) = V''(\pi) > 0$ (con il segno stretto). Se invece $\alpha = 1/2$ si ha $V''(0) = V''(\pi) = 0$, e quindi si ha il grafico rappresentato in Figura 2.

Se $\alpha > 1/2$ i punti di massimo sono $(-\pi/2, 0)$, $(0, 0)$, $(\pi/2, 0)$ e $(\pi, 0)$. Si ha

$$V(-\pi/2) = V(\pi/2) = 1, \quad V(0) = V(\pi) = \alpha.$$

Quindi se $\alpha < 1$ i punti di massimo assoluto sono $\pm\pi/2$ e si ha il grafico rappresentato in Figura 3 (la figura corrisponde al valore $\alpha = 5/6$).

Se $\alpha > 1$ i punti di massimo assoluto sono 0 e π , e si ha il grafico rappresentato in Figura 4 (la figura corrisponde al valore $\alpha = 3/2$).

Se infine $\alpha = 1$ si ha il grafico rappresentato in Figura 5.

3.4. Analisi qualitativa. Anche per lo studio qualitativo del moto distinguiamo i casi $\alpha \leq 1/2$ e $\alpha < 1/2$. Il moto avviene sulle curve di livello della funzione

$$H(\theta, y) = \frac{1}{2}y^2 + V(\theta), \quad (\theta, y) \in \mathbb{T} \times \mathbb{R},$$

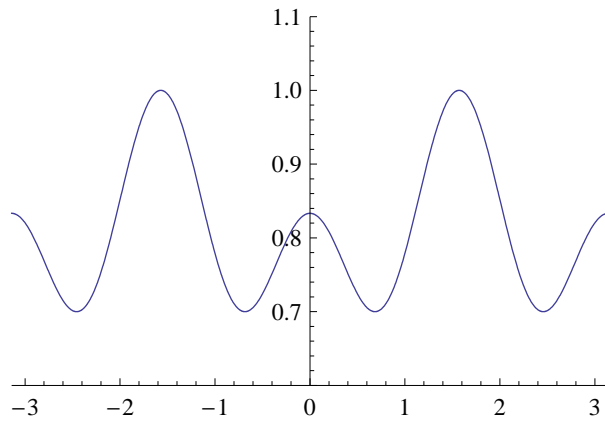


Figura 3. Grafico della funzione $V(\theta)$ per $1/2 < \alpha < 1$.

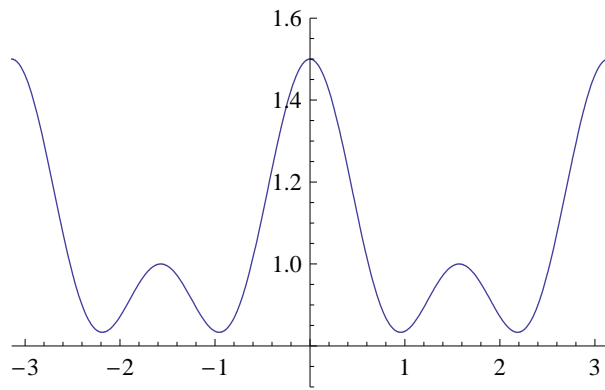


Figura 4. Grafico della funzione $V(\theta)$ per $\alpha > 1$.

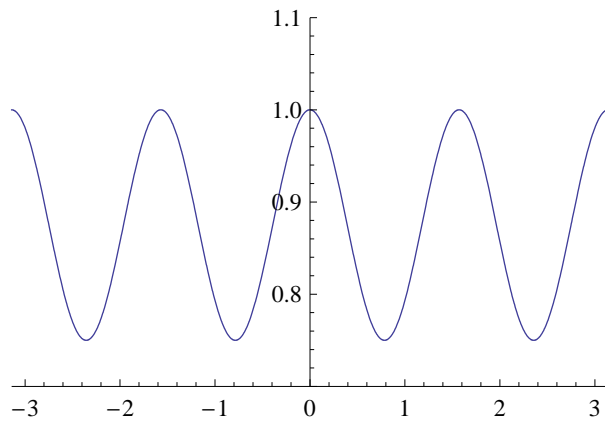


Figura 5. Grafico della funzione $V(\theta)$ per $\alpha = 1$.

che si possono ricavare dal grafico della funzione $V(\theta)$. Infatti la curva di livello

$$\Sigma_E = \{(\theta, y) \in \mathbb{T} \times \mathbb{R} : H(\theta, y) = E\}$$

si può anche scrivere

$$\Sigma_E = \{(\theta, y) \in \mathbb{T} \times \mathbb{R} : y = \pm y(\theta)\},$$

dove

$$y(\theta) = \sqrt{2(E - V(\theta))},$$

$$y'(\theta) = -\frac{V'(\theta)}{\sqrt{2(E - V(\theta))}}.$$

Quindi se $\alpha \leq 1/2$ (cfr. le Figure 1 e 2) si ha la situazione rappresentata in Figura 6.

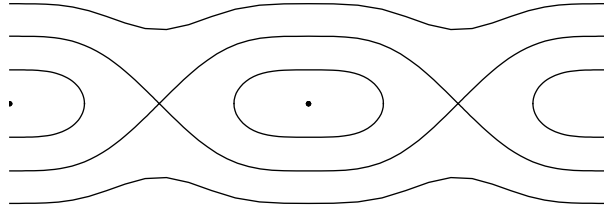


Figura 6. Curve di livello per $\alpha \leq 1/2$.

Si hanno curve di livello non vuote per $E \geq \min V(\theta) = V(0) = \alpha$, e cambiamenti qualitativi delle curve di livello si hanno in corrispondenza del valore $E = \max V(\theta) = V(\pi/2) = 1$. Per $\alpha < E < 1$ si hanno due curve chiuse che contengono al loro interno i punti d'equilibrio stabile $(0, 0)$ e $(\pi, 0)$, rispettivamente. Le curve di livello che corrisponde a $E = 1$ contiene le "separatrici", che attraversano i punti d'equilibrio instabile con tangenza obliqua (poiché $V''(\pm\pi/2) = -2 \neq 0$). Per $E > 1$ si hanno due curve chiuse, una nel semipiano superiore ($y > 0$) e una nel semipiano inferiore ($y < 0$). Il moto avviene da sinistra a destra nel semipiano $y > 0$ e da destra a sinistra nel semipiano $y < 0$. Si hanno quindi traiettorie periodiche per ogni valore di $E > \alpha$, $E \neq 1$.

Per $1/2 < \alpha < 1$ si ha la la situazione rappresentata in Figura 7.

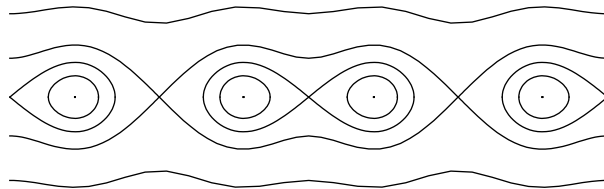


Figura 7. Curve di livello per $1/2 < \alpha < 1$.

Si hanno curve di livello non vuote per $E \geq \min V(\theta) = V(\theta_1) = 1 - 1/4\alpha$. Cambiamenti qualitativi nelle curve di livello si hanno per $E = V(0) = \alpha < 1$ e per $E = V(\pi/2) = 1$. Anche in questo caso, in corrispondenza dei punti di massimo la derivata seconda della funzione V è diversa da zero, quindi le separatrici attraversano i punti d'equilibrio instabile con tangenza obliqua. Il moto avviene da sinistra a destra nel semipiano $y > 0$ e da destra a sinistra nel semipiano $y < 0$. Si hanno traiettorie periodiche per ogni valore di $E > 1 - 1/4\alpha$, $E \neq 1$, $E \neq \alpha$.

Per $\alpha > 1$ si ha la situazione rappresentata in Figura 8.

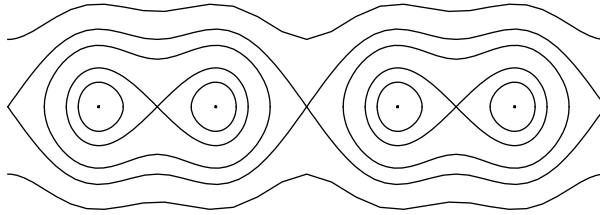


Figura 8. Curve di livello per $\alpha = 1$.

Come nel caso precedente si hanno curve di livello non vuote per $E \geq \min V(\theta) = V(\theta_1) = 1 - 1/4\alpha$ e cambiamenti qualitativi nelle curve di livello corrispondono ai valori $E = V(0) = \alpha > 1$ ed $E = V(\pi/2) = 1$. Al solito, il moto avviene da sinistra a destra nel semipiano $y > 0$ e da destra a sinistra nel semipiano $y < 0$. Si hanno traiettorie periodiche per ogni valore di $E > 1 - 1/4\alpha$, $E \neq 1$, $E \neq \alpha$.

Infine per $\alpha = 1$ si ha la situazione rappresentata in Figura 9.

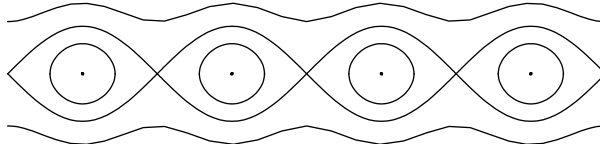


Figura 9. Curve di livello per $\alpha > 1$.

Si hanno curve di livello non vuote per $E \geq \min V(\theta) = V(\theta_1) = 1 - 1/4 = 3/4$. Le separatrici corrispondono al valore $E = 1$. Il moto avviene da sinistra a destra nel semipiano $y > 0$ e da destra a sinistra nel semipiano $y < 0$. Si hanno traiettorie periodiche per ogni valore di $E > 3/4$, $E \neq 1$.

3.5. Traiettorie periodiche e asintotiche. Il dato iniziale $(0, 1)$ si trova sulla curva di livello Σ_E , con

$$E = \frac{1}{2}1^2 + V(0) = \frac{1}{2} + \alpha.$$

Quindi se $\alpha < 1/2$ la traiettoria con dato iniziale $(0, 1)$ è periodica: infatti la separatrice corrisponde a $E = 1$, mentre la traiettoria si trova sulla curva di livello $E = 1/2 + \alpha < 1$. L'orbita corrispondente è una

curva chiusa intorno all'origine, che attraversa l'asse θ nei punti $\theta_{\pm} = \theta_{\pm}(\alpha)$, tali che $V(\theta_{\pm}) = 1/2 + \alpha$, con $0 < \theta_+ < \pi/2$ e $\theta_- = -\theta_+$.

Se invece $\alpha = 1/2$ il dato iniziale si trova sulla separatrice poiché è situato sulla curva di livello con energia $E = 1/2 + \alpha = 1$. Quindi la corrispondente traiettoria è asintotica ai punti $(\pm\pi/2, 0)$ per $t \rightarrow \pm\infty$, rispettivamente.

Se $\alpha > 1/2$ la traiettoria è periodica perché le separatrici corrispondono a $E = 1$ e $E = \alpha$, mentre la traiettoria si trova sulla curva di livello con $E = 1/2 + \alpha > 1$. In tal caso l'orbita corrispondente è la curva chiusa nel semipiano superiore che attraversa l'asse y nei punti $y = \pm 1$ (si tenga conto che θ è definito sul toro, quindi la traiettoria nel punto $\theta = \pi$ "si incolla" con la traiettoria nel punto $\theta = -\pi$).

In conclusione la traiettoria con dato iniziale $(0, 1)$ è periodica per ogni valore di α che non sia $\alpha = 1/2$.

3.6. Periodo delle traiettorie periodiche. Se $\alpha < 1/2$ si ha

$$T(\alpha) = 2 \int_{\theta_-(\alpha)}^{\theta_+(\alpha)} \frac{d\theta}{\sqrt{2 \left(\frac{1}{2} + \alpha - V(\theta) \right)}},$$

dove $\theta_{\pm}(\alpha)$ sono definiti al punto 3.5.

Se invece $\alpha > 1/2$ si ha

$$T(\alpha) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{2 \left(\frac{1}{2} + \alpha - V(\theta) \right)}}.$$

In particolare se $\alpha = 1$ si ha

$$T(1) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{1 + 2 - 2V(\theta)}} = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{1 + 2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta}} \leq \int_{-\pi}^{\pi} d\theta = 2\pi,$$

dove si è tenuto conto che per $\alpha = 1$ si ha

$$\begin{aligned} V(\theta) &= \sin^2 \theta + \cos^4 \theta = \sin^2 \theta + \cos^2 \theta \cos^2 \theta = \sin^2 \theta + \cos^2 \theta (1 - \sin^2 \theta) \\ &= \sin^2 \theta + \cos^2 \theta - \cos^2 \theta \sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta \sin^2 \theta, \end{aligned}$$

così che $1 + 2 - 2V(\theta) = 1 + 2 \cos^2 \theta \sin^2 \theta \geq 1$.

ESERCIZIO 4. Cfr. Cap. 7, §31, paragrafo 31.16.

ESERCIZIO 5.

5.1. Traiettorie virtuali. Una traiettoria virtuale è una qualsiasi curva di classe C^2 che ha supporto sulla superficie della sfera. In un sistema di coordinate con origine in corrispondenza del centro della sfera, si può individuare la posizione del punto P usando coordinate sferiche: $x = \rho \sin \varphi \cos \theta$, $y = \rho \sin \varphi \sin \theta$, $z = \rho \cos \varphi$, con $\rho \geq 0$, $\varphi \in [0, \pi)$ e $\theta \in [0, 2\pi)$.

Si può per esempio considerare la traiettoria virtuale

$$\begin{cases} x(\alpha) = R \sin \varphi(\alpha) \cos \theta(\alpha), \\ y(\alpha) = R \sin \varphi(\alpha) \sin \theta(\alpha), \\ z(\alpha) = R \cos \varphi(\alpha), \end{cases}$$

dove R è il raggio della sfera, e $\alpha \rightarrow (\varphi(\alpha), \theta(\alpha))$ è una curva qualsiasi; per esempio si può prendere $\varphi(\alpha) = \varphi_0 = \text{costante}$ e $\theta(\alpha) = \alpha$.

5.2. Soluzioni e traiettorie virtuali. Sì: le soluzioni sono curve di classe C^2 compatibili con le condizioni di vincolo, quindi hanno supporto sulla superficie della sfera.

5.3. Forze vincolari. Le forze vincolari sono dirette ortogonalmente alla superficie della sfera, come conseguenza del principio di d'Alembert. Infatti il principio di d'Alembert implica (cfr. Cap. 9, §39, in particolare Lemma 39.4 e Proposizione 39.7) che le forze vincolari sono dirette parallelamente al gradiente ∇G , dove $G(x, y, z) := x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$ definisce il vincolo, e ∇G è ortogonale alla superficie di vincolo.

5.4. Massimo e minimo delle forze vincolari. Le forze vincolari si oppongono alla forza di gravità (unica forza agente sul sistema), in quanto costringono il punto materiale a rimanere sulla superficie della sfera invece di cadere verso il basso. Quindi la forza vincolare sarà massima nei punti in cui la forza di gravità è ortogonale alla superficie di vincolo, e minima nei punti in cui la forza di gravità è tangente alla superficie di vincolo. In altre parole, la forza vincolare è massima in corrispondenza dei punti $\varphi = 0$ e $\varphi = \pi/2$ (usando le coordinate sferiche del punto 5.1) e minima (nulla) lungo l'“equatore” ($\varphi = \pi/2$).

ESERCIZIO 6.

6.1. Momento d'inerzia. Indichiamo con P_1 uno dei quattro punti del sistema e ordiniamo gli altri punti P_2, P_3, P_4 muovendoci in senso orario lungo il quadrato.

Si scelga un sistema di riferimento con origine nel centro del quadrato e asse \mathbf{e}_3 diretto lungo l'asse \mathbf{e} . Il centro di massa si trova in corrispondenza del centro del quadrato. Questo è evidente per simmetria, o, alternativamente, per conto esplicito: infatti si ha

$$\mathbf{q}_C = (x_C, y_C, z_C) = \sum_{i=1}^4 m_i \mathbf{q}_i = m \sum_{i=1}^4 \mathbf{q}_i, \quad \mathbf{q}_i = (x_i, y_i, z_i),$$

quindi $z_C = 0$ poiché $z_i = 0$ per $i = 1, \dots, 4$, e $x_C = y_C = 0$ poiché $x_1 + x_3 = x_2 + x_4 = 0$ e, allo stesso modo, $y_1 + y_3 = y_2 + y_4 = 0$ (in altre parole $\mathbf{q}_1 = -\mathbf{q}_3$ e $\mathbf{q}_2 = -\mathbf{q}_4$).

Il momento d'inerzia del sistema rispetto all'asse \mathbf{e} è quindi dato da

$$I_{\mathbf{e}} = \sum_{i=1}^4 m_i r_i^2 = m \sum_{i=1}^4 r_i^2 = m \sum_{i=1}^4 (x_i^2 + y_i^2) = m \sum_{i=1}^4 \left(\frac{\ell}{\sqrt{2}} \right)^2 = 2m\ell^2 = 2.$$

6.2. Asse d'inerzia. L'asse \mathbf{e} è un asse d'inerzia. Infatti, se

$$I = \begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_{22} & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} \end{pmatrix} = m \sum_{i=1}^4 \begin{pmatrix} y_i^2 + z_i^2 & -x_i y_i & -x_i z_i \\ -x_i y_i & x_i^2 + z_i^2 & -y_i z_i \\ -x_i z_i & -y_i z_i & x_i^2 + y_i^2 \end{pmatrix},$$

quindi $z_i = 0$ implica

$$I = m \sum_{i=1}^4 \begin{pmatrix} y_i^2 & -x_i y_i & 0 \\ -x_i y_i & x_i^2 & 0 \\ 0 & 0 & x_i^2 + y_i^2 \end{pmatrix},$$

da cui si vede immediatamente che

$$I\mathbf{e} = I \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = I_e\mathbf{e},$$

quindi \mathbf{e} è un asse d'inerzia e I_e è il corrispondente momento principale d'inerzia.

Si noti che si ha $z_i = 0$ per il particolare sistema di riferimento scelto. In ogni caso, anche prendendo un sistema di riferimento con $z_i \neq 0$ la stessa proprietà segue dal fatto che se il punto di coordinate (x_i, y_i, z_i) appartiene al sistema, allora anche i punti $(x_i, -y_i, z_i)$ e $(-x_i, y_i, z_i)$ appartengono al sistema.