Corso di laurea in Matematica

Sistemi dinamici – Primo Modulo

Prova d'esonero del 9-12-99

CORREZIONE

Esercizio 1.

(1.1) Si ha

$$
\begin{aligned}
V(x) &= \left(x^2-1\right)\left(x^2-2\right)\left(x^2-3\right) = x^6 - 6x^4 + 11x^2 - 6 \ , \\
V'(x) &= \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x} = 6x^5 - 24x^3 + 22x = 2x\left(3x^4 - 12x^2 + 11\right) \ , \\
V''(x) &= \frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}x^2} = 30x^4 - 72x^2 + 22 = 2\left(15x^4 - 36x^2 + 11\right) \ .
\end{aligned}
$$

L'equazione del moto è quindi

$$\ddot{x} = -V'(x) = -2x\left(3x^4 - 12x^2 + 11\right) \ .$$

(1.2) I punti stazionari di $V(x)$ sono i valori x tali che

$$\begin{cases} x^2 = 0 \ , \\ x^2 = 2 - 1/\sqrt{3} \ , \\ x^2 = 2 + 1/\sqrt{3} \ , \end{cases}$$

quindi sono i 5 valori

$$\begin{cases} x = 0 \ , \\ x = \pm\sqrt{2 - 1/\sqrt{3}} \ , \\ x = \pm\sqrt{2 + 1/\sqrt{3}} \ , \end{cases}$$

Si ha

$$
\begin{aligned}
&V(0) = 0 \ , \qquad V'(0) = 0 \qquad V''(0) = 22 > 0 \ , \\
&V(\pm\sqrt{2-1/\sqrt{3}}) = \frac{2}{3\sqrt{3}} \ , \qquad V'(\pm\sqrt{2-1/\sqrt{3}}) = 0 \ , \qquad V''(\pm\sqrt{2-1/\sqrt{3}}) = 8\left(1-2\sqrt{3}\right) < 0 \ , \\
&V(\pm\sqrt{2+1/\sqrt{3}}) = -\frac{2}{3\sqrt{3}} \ , \qquad V'(\pm\sqrt{2+1/\sqrt{3}}) = 0 \ , \qquad V''(\pm\sqrt{2+1/\sqrt{3}}) = 8\left(1+2\sqrt{3}\right) > 0 \ ,
\end{aligned}
$$

Quindi i punti d'equlibrio sono 5:

$$P_0 = (0,0) \ , \qquad P_{\pm 1} = (\pm\sqrt{2-1/\sqrt{3}}, 0) \ , \qquad P_{\pm 2} = (\pm\sqrt{2+1/\sqrt{3}}, 0) \ .$$

(1.3) I punti P_0, P_{-2} e P_2 saranno punti d'equilibrio stabile, mentre i punti P_{-1} e P_1 saranno punti d'equilibrio instabile, come implica la seguente discussione.

Poiché i punti $x_0 = 0$ e $x_{\pm 1} = \pm\sqrt{2-1/\sqrt{3}}$ sono punti di minimo per l'energia potenziale $V(x)$, per il Teorema di Lagrange i punti P_0, P_{-2} e P_2 sono punti d'equilibrio stabile per il sistema dinamico corrispondente

$$\begin{cases} \dot{x} = y \ , \\ \dot{y} = -V'(x) \ ; \end{cases}$$

basta infatti prendere

$$W(x,y) = \frac{1}{2}y^2 + V(x) - V(x_0)$$

oppure

$$W(x,y) = \frac{1}{2}y^2 + V(x) - V(x_{\pm 1})$$

come funzione di Lyapunov

Riguardo ai punti $P_{\pm 2}$ basta analizzare le curve di livello (cfr. il punto (1.4) successivo); alternativamente si può studiare il sistema linearizzato e verificare che uno dei due autovalori corrsipondenti ha parte reale negativa.

(1.4) Ved. Figura.

(1.5) L'energia corrispondente al dato iniziale scelto è data da

$$E(\bar{x},\bar{y}) = \frac{1}{2}\bar{y}^2 + V(\bar{x}) = 0 \; .$$

Dal grafico della curva $x \to V(x)$ si vede che il dato iniziale $(\bar{x},\bar{y}) = (1,0)$ si trova su un'orbita chiusa, percorsa quindi da una traiettoria periodica.

(1.6) Si ha $E - V(x) = \left(1-x^2\right)\left(2-x^2\right)\left(3-x^2\right)$, così che

$$T = 2\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2\,(1-x^2)\,(2-x^2)\,(3-x^2)}} \; .$$

(1.7) Se definiamo

$$\Phi(x) = \left(1-x^2\right)\left(2-x^2\right)\left(3-x^2\right) \; ,$$

si ha

$$\Phi(x) = Q(x)\left(1-x^2\right) = Q(x)\,(1+x)\,(1-x) \; ,$$

dove

$$Q(x) = \left(2-x^2\right)\left(3-x^2\right) \; .$$

Quindi per $x \in [-1,1]$ si ha

$$1 \cdot 2 = 2 \le Q(x) \le 2 \cdot 3 = 6 \; ,$$

così che risulta

$$\Phi_2(x) \equiv 2\,(1+x)\,(1-x) \le \Phi(x) \le \Phi_1(x) \equiv 2\,(1+x)\,(1-x) \; .$$

Quindi

$$T_1 \le T \le T_2 \; ,$$

dove

$$T_j = 2\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2\Phi_j(x)}} \; , \qquad j = 1, 2 \; .$$

Thendno conto che

$$\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(1+x)(1-x)}} = \pi \; ,$$

si ha quindi

$$T_1 = \frac{2}{\sqrt{12}} \int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(1+x)\,(1-x)}} = \frac{2\pi}{\sqrt{12}} = \frac{\pi}{\sqrt{3}} \,,$$

$$T_2 = \frac{2}{\sqrt{4}} \int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(1+x)\,(1-x)}} = \frac{2\pi}{\sqrt{4}} = \pi \,,$$

così che

$$\frac{\pi}{\sqrt{3}} \le T \le \pi \,.$$

(1.8) Il dato iniziale $(\sqrt{2+1/\sqrt{3}}, 0)$ corrisponde alla posizione d'equilibrio instabile P_2. Quindi

$$x(t) = \frac{3}{2} + \frac{2}{3\sqrt{3}} \,, \qquad \dot{x}(t) = 0 \,, \qquad \forall t \in \mathbb{R} \,.$$

(1.9) Se $\dot{x}(0) > 0$ allora la corrispondente traiettoria è periodica (come si vede dallo studio delle curve di livello al punto (1.4)).

<u>Esercizio 2.</u>

I Metodo.

Il polinomio caratteristico dell'operatore lineare

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

è

$$p(\lambda) = (-1-\lambda)\,(-1-\lambda)\,(1-\lambda) = (-1-\lambda)^2\,(1-\lambda) \,,$$

così che lo spettro di A è costituito dagli autovalori

$$\lambda_1 = -1 \,, \qquad \lambda_2 = -1 \,, \qquad \lambda_3 = 1 \;:$$

abbiamo quindi due autovalori distinti $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_3 = 1$ di molteplicità rispettivamente $n_1 = 2$ e $n_3 = 1$.

Possiamo scrivere $\mathbb{R}^3 = E_1 \oplus E_2$, dove $E_1 = \ker(A + \mathbb{1})^2$ e $E_2 = \ker(A - \mathbb{1})$.

Si ha

$$A + \mathbb{1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \,, \qquad A - \mathbb{1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \,,$$

così che una base $\{v_1, v_2\}$ di E_1 è data dai vettori di componenti (x, y, z) tali che

$$(A+\mathbb{1})^2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \,,$$

mentre una base $\{v_3\}$ di E_2 è data dall'autovettore associato all'autovalore $\lambda_3 = 1$, *i.e.* dal vettore di componenti (x, y, z) tali che

$$(A - \mathbb{1}) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \,.$$

Dalla prima relazione otteniamo per le componenti di v_1, v_2 la relazione

$$z = 0 \; ,$$

che, per esempio, permette di scegliere

$$v_1 = (1, 0, 0) \; , \qquad v_2 = (0, 1, 0) \; ,$$

mentre per le componenti di v_3 otteniamo

$$\begin{cases} -2x + y - 2z = 0 \; , \\ -y + 2z = 0 \; , \end{cases}$$

così che la somma delle due equazioni implica $x = 0$, così che $y = 2z$; se scegliamo $z = 1$, abbiamo quindi

$$v_3 = (0, 2, 1) \; .$$

In conclusione si ha

$$\begin{cases} \left.\begin{array}{l} \lambda_1 = -1 \\ \lambda_2 = -1 \end{array}\right\} & \to \\ \lambda_3 = +1 & \to \end{cases} \qquad \begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} v_1 = (1, 0, 0) \; , \\ v_2 = (0, 1, 0) \; , \end{array}\right. \\ \;\; v_3 = (0, 2, 1) \; . \end{array}$$

Si ha quindi

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} \; , \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \; ,$$

se $\{e_1, e_2, e_3\}$ è la base standard in cui l'operatore lineare che definisce il sistema dinamico è rappresentato dalla matrice A.

Siano y le coordinate nella base definita dagli autovettori $\{v_1, v_2, v_3\}$. Si ha allora

$$y = Qx \; , \qquad Q^{-1} = P^T \; .$$

Quindi

$$Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \; .$$

così che $\det Q = 1$. Si ha quindi

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \; .$$

Scriviamo $A = S + N$, dove S è semisemplice e N è nilpotente. L'operatore rappresentato da S nella base $\{e_1, \dots, e_n\}$ è rappresentato nella base $\{v_1, v_2, v_3\}$ dalla matrice

$$S' = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \; ,$$

così che si ha

$$\begin{aligned} S = Q^{-1} S' Q &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \; . \end{aligned}$$

Si ha quindi
$$N = A - S = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
e si verifica immediatamente che
$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0 \,,$$
così che N è effettivamente nilpotente.

Si ha allora, per ogni $t \in \mathbb{R}$,
$$e^{tA} = e^{t(S+N)} = e^{tS+tN} = e^{tS}e^{tN} = Q^{-1}e^{tS'}Q\, e^{tN} \,,$$
dove
$$\begin{aligned} e^{tS} = Q^{-1}e^{tS'}Q &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & -2e^{-t} \\ 0 & 0 & e^{t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & 2e^{t} - 2e^{-t} \\ 0 & 0 & e^{t} \end{pmatrix} \end{aligned}$$
e
$$e^{tN} = \mathbb{1} + tN = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & t & -2t \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & t & -2t \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \,.$$
In conclusione si ha
$$\begin{aligned} e^{tA} &= \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & 2e^{t} - 2e^{-t} \\ 0 & 0 & e^{t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & t & -2t \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^{-t} & te^{-t} & -2te^{-t} \\ 0 & e^{-t} & 2e^{t} - 2e^{-t} \\ 0 & 0 & e^{t} \end{pmatrix} \,. \end{aligned}$$

Se il dato iniziale è $x(0) = (1, 1, 1)$ si ha allora
$$\begin{aligned} x(t) = e^{At}x(0) &= \begin{pmatrix} e^{-t} & te^{-t} & -2te^{-t} \\ 0 & e^{-t} & 2e^{t} - 2e^{-t} \\ 0 & 0 & e^{t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^{-t} + te^{-t} - 2te^{-t} \\ e^{-t} + 2e^{t} - 2e^{-t} \\ e^{t} \end{pmatrix} \,. \end{aligned}$$

Quindi la soluzione del sistema $\dot{x} = Ax$, con condizioni iniziali $x(0) = (1, 1, 1)$, è
$$\begin{cases} x_1(t) = (1-t)\, e^{-t} \,, \\ x_2(t) = 2e^{t} - e^{-t} \,, \\ x_3(t) = e^{t} \,. \end{cases}$$

II Metodo.

Scrivendo il sistema $\dot{x} = Ax$ nella forma
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + x_2 - 2x_3 \,, \\ \dot{x}_2 = -x_2 + 4x_3 \,, \\ \dot{x}_3 = x_3 \,, \end{cases}$$

si vede che la terza equazione dipende solo dalla funzione x_3, quindi si può risolvere esplicitamente. Tenendo conto della condizione iniziale si ha

$$x_3(t) = e^t x_{03} = e^t \ .$$

Quindi la seconda equazione diventa

$$\dot{x}_2 = -x_2 + 4e^t \ ,$$

che è un'equazione differenziale lineare non omogenea in x_2. La soluzione si scrive nella forma

$$\begin{aligned} x_2(t) &= e^{-t}\left[x_{02} + \int_0^t \mathrm{d}s\, e^{-(-s)} 4e^s\right] = e^{-t}\left[1 + 4\int_0^t \mathrm{d}s\, e^{2s}\right] \\ &= e^{-t}\left[1 + 4\left(\frac{e^{2t}-1}{2}\right)\right] = e^{-t}\left[2e^{2t}-1\right] = 2e^t - e^{-t} \ . \end{aligned}$$

Utilizzando le due espressioni trovate per x_2 e per x_3, si trova per x_1 l'equazione

$$\dot{x}_1 = -x + \left(2e^t - e^{-t}\right) - 2e^t = -x + e^{-t} \ ,$$

che di nuovo è un'equazione differenziale lineare non omogenea, ora in x_1. La soluzione si scrive nella forma

$$\begin{aligned} x_1(t) &= e^{-t}\left[x_{01} + \int_0^t \mathrm{d}s\, e^{-(-s)}\left(-e^{-s}\right)\right] \\ &= e^{-t}\left(1 - \int_0^t \mathrm{d}s\, 1\right) = e^{-t}\left(1-t\right) \ . \end{aligned}$$

In conclusione la soluzione con condizioni iniziali $x_0 = (1,1,1)$ è data da

$$\begin{cases} x_1(t) = (1-t)\, e^{-t} \ , \\ x_2(t) = 2e^t - e^{-t} \ , \\ x_3(t) = e^t \ . \end{cases}$$

<u>Esercizio 3.</u>

Il polinomio caratteristico è

$$p(\lambda) = (4-\lambda)(2-\lambda) + 1 = \lambda^2 - 6\lambda + 9 = (\lambda-3)^2 = 0 \ ,$$

così che gli autovalori di A sono dati entrambi da $\lambda = 3$, *i.e.* sono coincidenti.

Si ha allora

$$A = S + N \ ,$$

dove

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \ , \qquad N \equiv A - S = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \ .$$

Si verifica immediatamente che

$$(1) \qquad [S,N] \equiv SN - NS = 0 \ ,$$
$$(2) \qquad N^2 = 0 \ ,$$

così che si ha

$$e^{At} = e^{St}e^{Nt} = e^{3t}\left(\mathbb{1} + Nt\right) = e^{3t}\begin{pmatrix} 1+t & -t \\ t & 1-t \end{pmatrix} \ ,$$

da cui si ottiene

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = e^{3t}\begin{pmatrix} 1+t & -t \\ t & 1-t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{01} \\ x_{02} \end{pmatrix} \ ,$$

che, espressa per componenti, dà

$$\begin{cases} x_1(t) = e^{3t}\left[(1+t)\, x_{01} - t x_{02}\right] \ , \\ x_2(t) = e^{3t}\left[t x_{01} + (1-t)\, x_{02}\right] \ , \end{cases}$$

che costituisce la soluzione del sistema con dati iniziali $(\bar{x}, \bar{y})$.