

Corso di laurea in Matematica
Sistemi dinamici – Primo Modulo

PROVA D'ESONERO DEL 10-01-2000

ESERCIZIO 1. Si considerino due punti materiali P_1 e P_2 di massa $m_1 = m_2 = 2$ che interagiscono attraverso una forza centrale di energia potenziale

$$V(\rho) = \rho - \frac{1}{4}\rho^4,$$

dove $\rho = \|\mathbf{r}\|$ e $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ è il vettore che individua la posizione relativa dei due punti.

- (1) Descrivere il moto mettendosi nel sistema del centro di massa, in modo da ricondursi a un sistema a due gradi di libertà (descrivibile attraverso le due variabili polari (ρ, θ)).
- (2) Discutere il moto della variabile $\rho(t)$ e analizzare qualitativamente le orbite nel piano $(\rho, \dot{\rho})$ al variare del momento angolare L del sistema.
- (3) Determinare i punti d'equilibrio (discutendone la stabilità) e le traiettorie periodiche nel piano $(\rho, \dot{\rho})$.
- (4) Scrivere la legge di variazione di $\theta(t)$ in funzione di $\rho(t)$.
- (5) Individuare un moto periodico per il sistema complessivo e trovarne il periodo.
- (6) Discutere le condizioni sotto le quali in generale il moto del sistema complessivo è periodico (sempre nel sistema del centro di massa).

ESERCIZIO 2. Dato un sistema di riferimento $\kappa = Oxyz$ (sistema assoluto), si consideri anche un sistema di riferimento mobile $K = O'\xi\eta\zeta$ (sistema relativo), la cui origine O' si muove in senso antiorario lungo la circonferenza di raggio 1 e centro il punto $C = (0, 1)$ nel piano (x, y) . L'asse ζ di K si mantiene sempre parallelo all'asse z di κ , mentre l'asse ξ si mantiene sempre tangente alla circonferenza nel punto O' : i due sistemi κ e K coincidono all'istante iniziale $t = 0$.

La componente lungo l'asse x del vettore che individua il punto O' varia secondo la legge $x_{O'}(t) = \sin t$.

Un punto materiale P di massa $m = 1$ si muove lungo l'asse ξ con legge oraria $\xi(t) = a \sin bt$, con a, b costanti positive.

- (1) Scrivere la trasformazione rigida $D: K \rightarrow \kappa$ come composizione di una traslazione C con una rotazione B , *i.e.* $D = CB$, e determinare C e B .
- (2) Scrivere la soluzione delle equazioni del moto $\mathbf{q}(t)$ nel sistema assoluto e $\mathbf{Q}(t)$ nel sistema mobile.
- (3) Determinare la velocità assoluta \mathbf{v} .
- (4) Determinare la velocità relativa \mathbf{v}' .
- (5) Determinare la componente traslatoria della velocità di trascinamento \mathbf{v}_0 .
- (6) Determinare la componente rotatoria della velocità di trascinamento \mathbf{v}_T .
- (7) Determinare la forza di Coriolis che agisce sul punto P .
- (8) Determinare la forza centrifuga che agisce sul punto P .