Corso di laurea in Matematica

Sistemi dinamici – Primo Modulo

PROVA D'ESONERO DEL 10-01-2000

CORREZIONE

ESERCIZIO 1.

(1.1) Ponendo

$$\begin{cases} \mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 \ , \\ \mathbf{R} = (m_1 + m_2)^{-1} \left(m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2 \right) \ , \end{cases}$$

le equazioni del moto

$$\begin{cases} m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 = \mathbf{F}_1 \ , \\ m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 = \mathbf{F}_2 \ , \end{cases}$$

con $\mathbf{F}_j = -\partial V / \partial \mathbf{r}_j$, diventano

$$\begin{cases} m \ddot{\mathbf{R}} = 0 \ , \\ \mu \ddot{\mathbf{r}} = -\partial V / \partial \mathbf{r} \ , \end{cases}$$

dove $m = m_1 + m_2 = 4$ è la massa totale e $\mu = m_1 m_2 / (m_1 + m_2) = 1$ è la massa ridotta.

Nel sistema del centro di massa occorre dunque considerare solo la seconda equazione.

(1.2) Tenuto conto delle leggi di conservazione del sistema e passando a coordinate polari, l'equazione

$$\mu \ddot{\mathbf{r}} = -\partial V / \partial \mathbf{r} \ , \qquad \mu = 1 \ ,$$

dà per la variabile radiale ρ

$$\ddot{\rho} = -\frac{\partial V_{\text{eff}}(\rho)}{\partial \rho} \ , \qquad V_{\text{eff}}(\rho) = V(\rho) + \frac{L^2}{2\rho^2} \ ,$$

indicando con $|L|$ il modulo del momento angolare $\mathbf{L}$ del sistema, *i.e.* $|L| = \|\mathbf{L}\|$.

Abbiamo quindi un sistema unidimensionale che descrive un punto materiale di massa $\mu = 1$ sottoposto a una forza di energia potenziale (efficace)

$$V_{\text{eff}}(\rho) = V(\rho) + \frac{L^2}{2\rho^2} = \rho - \frac{1}{4}\rho^4 + \frac{L^2}{2\rho^2} \ , \qquad \rho \geq 0 \ .$$

Studiamo dunque la funzione $V_{\text{eff}}(\rho)$. Si ha

$$V'_{\text{eff}}(\rho) = 1 - \rho^3 - L^2 \rho^{-3} = -\rho^{-3} \left(\rho^6 - \rho^3 + L^2 \right) \ ,$$

così che risulta $V'_{\text{eff}}(\rho) = 0$ per $\rho = \rho_\pm$, dove

$$\rho_\pm^3 = \frac{1}{2} \left(1 \pm \sqrt{1 - 4L^2} \right) \ .$$

Definendo

$$\Delta = 1 - 4L^2 \ ,$$

si vede quindi che la funzione $V'_{\text{eff}}(\rho)$ ammette due radici distinte, due radici coincidenti e nessuna radice, a seconda che sia $\Delta > 0$, $\Delta = 0$ e $\Delta < 0$.

Si ha quindi

$$\begin{cases} \rho_- = \left(1-\sqrt{\Delta}\right)/2, \rho_+ = \left(1+\sqrt{\Delta}\right)/2, & \text{se } |L| < 1/2 \ , \\ \rho_- = \rho_+ = 1/2, & \text{se } |L| = 1/2 \ , \\ \text{nessuna radice} \ , & \text{se } |L| > 1/2 \ . \end{cases}$$

Poiché risulta

$$\begin{cases} V'_{\text{eff}}(\rho_\pm) = 0 \ , \\ \lim_{\rho\to 0} V'_{\text{eff}}(\rho) < 0 \ , \\ \lim_{\rho\to\infty} V'_{\text{eff}}(\rho) < 0 \ , \end{cases}$$

si vede che la funzione $V_{\text{eff}}(\rho)$ è come rappresentata in Fig. 1. Corrispondentemente nel piano $(\rho, \dot\rho)$ si ha la situazione rappresentata in Fig. 2.

(1.3) I punti d'equilibrio sono i punti $(\rho, \dot\rho) = (\rho_\pm, 0)$. Dalla Fig. 1 si evince quindi che si hanno:
(i) due punti d'equilibrio, di cui uno stabile $(\rho_-, 0)$ e uno instabile $(\rho_+, 0)$, per $|L| < 1/2$;
(ii) un punto d'equilibrio instabile $(1/2, 0)$, per $|L| = 1/2$;
(iii) nessun punto d'equilibrio per $|L| > 1/2$.

Si possono avere traiettorie periodiche solo nel caso $|L| < 1/2$. Se, in tal caso, poniamo

$$E_\pm = V_{\text{eff}}(\rho_\pm) \ ,$$

e, più in generale,

$$H(\rho, \dot\rho) = \frac{1}{2}\dot\rho^2 + V_{\text{eff}}(\rho) \ ,$$

si possono avere quindi traiettorie periodiche se il parametro $|L|$ e i dati iniziali $(\bar\rho, \dot{\bar\rho})$ verificano le seguenti tre condizioni:
(a) $|L| < 1/2$;
(b) $\bar\rho < \rho_+$;
(c) $E_- < H(\bar\rho, \dot{\bar\rho}) < E_+$.

(1.4) Si ha

$$\dot\theta = \frac{L}{\rho^2} \ ,$$

quindi

$$\theta(t) = \bar\theta + \int_0^t \mathrm{d}s \frac{L}{\rho^2(s)} \ ,$$

dove $\bar\theta = \theta(0)$ è il valore iniziale della variabile angolare.

(1.5) Se il dato iniziale per la variabile radiale è $(\bar\rho, \dot{\bar\rho}) = (\rho_-, 0)$, con L tale che $|L| < 1/2$, allora si ha

$$\rho(t) = \rho_- \qquad \forall t \in \mathbb{R} \ ,$$

quindi

$$\dot\theta = \frac{L}{\rho_-^2} = \frac{2L}{1 - 2L^2 - \sqrt{1-4L^2}} \equiv \omega$$

è costante. Ne segue che il moto è in tal caso un moto circolare uniforme con velocità angolare ω: in particolare è quindi un moto periodico con periodo

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi\rho_-^2}{L} = \frac{\pi}{L}\left(1 - 2L^2 - \sqrt{1-4L^2}\right) \ .$$

(1.6) Le condizioni sotto cui il moto complessivo risulta periodico sono le seguenti. In primo luogo deve essere periodico il moto della variabile radiale, *i.e.* deve esistere $T > 0$ tale che $\rho(t) = \rho(t+T)$ per ogni $t \in \mathbb{R}$. Inoltre, se Θ indica l'incremento della variabile θ in un semiperiodo (*i.e.* in un tempo $T/2$), così che

$$\Theta = \int_{\rho_-}^{\rho_+} \frac{\mathrm{d}\rho}{\rho^2 \sqrt{(2/L^2)\,(E - V_{\text{eff}}(\rho))}} ,$$

deve risultare

$$\Theta/2\pi \in \mathbb{Q} ,$$

i.e. Θ deve essere commensurabile con 2π.

Questo vuol dire che i dati iniziali, individubaili dando i valori $(L, E, \bar{\rho}, \bar{\theta})$ nonché il segno di $\dot{\bar{\rho}}$, devono essere tali che siano soddisfatte le condizioni (a), (b) e (c) del punto (1.3) e, inoltre, risulti $\Theta/2\pi \in \mathbb{Q}$.

<u>Esercizio 2.</u>

(2.1) Nel sistema κ il punto O' ha coordinate

$$\mathbf{q}_{O'} = (\sin t, 1 - \cos t, 0) .$$

Si ha quindi

$$\mathbf{q} = D\mathbf{Q} = CB\mathbf{Q} = B\mathbf{Q} + \mathbf{r} ,$$

con

$$\mathbf{r} = (\sin t, 1 - \cos t, 0)$$

e

$$B = \begin{pmatrix} \cos\theta(t) & -\sin\theta(t) & 0 \\ \sin\theta(t) & \cos\theta(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} , \qquad \theta(t) = t .$$

Quindi la trasformazione rigida D: $K \to \kappa$ è data dalla composizione della rotazione B con la traslazione C, definita da $C\mathbf{x} = \mathbf{x} + \mathbf{r}$.

(2.2) Scriviamo $\mathbf{q} = (x, y, z)$ e $\mathbf{Q} = (\xi, \eta, \zeta)$. Si ha quindi

$$\mathbf{Q}(t) = \begin{cases} \xi(t) = a \sin bt , \\ \eta(t) = 0 , \\ \zeta(t) = 0 , \end{cases}$$

mentre

$$\mathbf{q}(t) = D\mathbf{Q}(t) = \begin{cases} x(t) = a \sin bt \cos t + \sin t , \\ y(t) = a \sin bt \sin t + 1 - \cos t , \\ z(t) = 0 . \end{cases}$$

(2.3) La velocità assoluta $\mathbf{v}$ è data da

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{q}} .$$

Quindi si ha

$$\mathbf{v} = (ab \cos bt \cos t - a \sin bt \sin t + \cos t, ab \cos bt \sin t + a \sin bt \cos t + \sin t, 0) .$$

(2.4) La velocità relativa $\mathbf{v}'$ è data da

$$\mathbf{v}' = B\dot{\mathbf{Q}} ,$$

dove

$$\dot{\mathbf{Q}} = (ab\cos bt, 0, 0)\ .$$

Quindi si ha

$$\mathbf{v}' = (ab\cos bt\cos t, ab\cos bt\sin t, 0)\ \ .$$

(2.5) La componente traslatoria della velocità di trascinamento $\mathbf{v}_0$ è data da

$$\mathbf{v}_0 = \dot{\mathbf{r}}\ .$$

Quindi

$$\mathbf{v}_0 = (\cos t, \sin t, 0)\ .$$

(2.6) La componente rotatoria della velocità di trascinamento $\mathbf{v}_T$ è data da

$$\mathbf{v}_T = [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{q} - \mathbf{r}]\ \ ,$$

dove

$$\boldsymbol{\omega} = (0, 0, \omega)\ , \qquad \omega = 1\ .$$

Quindi, tenuto conto che

$$\mathbf{q} - \mathbf{r} = (a\sin bt\cos t, a\sin bt\sin t, 0)\ \ ,$$

si ha

$$\mathbf{v}_T = (-a\sin bt\sin t, a\sin bt\cos t, 0)\ \ .$$

Si può facilmente verificare che l'identità $\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_T$ è soddisfatta.

(2.7) La forza di Coriolis $\mathbf{F}_2$ è data da

$$\mathbf{F}_2 = -2\left[\boldsymbol{\Omega}, \dot{\mathbf{Q}}\right]\ \ ,$$

dove $\boldsymbol{\Omega} = B\boldsymbol{\Omega} = (0, 0, \omega) = (0, 0, 1)$. Quindi

$$\mathbf{F}_2 = (0, -2ab\cos bt, 0)\ .$$

(2.8) La forza centrifuga $\mathbf{F}_3$ è data da

$$\mathbf{F}_3 = -\left[\boldsymbol{\Omega}, [\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{Q}]\right]\ \ .$$

Poiché

$$[\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{Q}] = (0, a\sin bt, 0)\ ,$$

si ha quindi

$$\mathbf{F}_3 = (a\sin bt, 0, 0)\ .$$