

Corso di laurea in Matematica
Sistemi dinamici – Primo Modulo

PROVA D'ESONERO DELL'08-11-00

ESERCIZIO 1. Si consideri il sistema di equazioni differenziali lineari

$$\dot{x} = Ax, \quad x \in \mathbb{R}^3, \quad A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -4 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

con condizioni iniziali $x(0) = (x_{01}, x_{02}, x_{03})$. Se ne trovi la soluzione.

ESERCIZIO 2. Sia dato il sistema dinamico planare

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 - 1 + 4y^3, \\ \dot{y} = -2xy. \end{cases}$$

(2.1) Verificare che la funzione

$$H(x, y) = y(x^2 + y^3 - 1)$$

è una costante del moto.

(2.2) Determinare i punti d'equilibrio.

(2.3) Discuterne la stabilità.

(2.4) Analizzare le traiettorie lungo le curve di livello che corrispondono al valore $H(x, y) = 0$.

(2.5) Discutere qualitativamente le altre traiettorie.