Corso di laurea in Matematica

Sistemi dinamici – Primo Modulo

PROVA D'ESONERO DEL 22-12-2000

Svolgere a scelta due dei tre seguenti esercizi:

ESERCIZIO 1. Si consideri il sistema meccanico unidimensionale che descrive un punto materiale di massa $m = 1$, soggetto alla forza di energia potenziale

$$V(x) = e^{2x^2} \left(2x^2 - 1\right) \left(x^2 - 1\right)^2 .$$

(1.1) Scrivere l'equazione del moto.
(1.2) Verificare che l'energia $E(x, y) = y^2/2 + V(x)$, con $y = \dot{x}$, è una costante del moto.
(1.3) Determinare i punti d'equilibrio del sistema dinamico corrispondente.
(1.4) Discuterne la natura.
(1.5) Determinare analiticamente la curva di livello che corrisponde al valore $E = 0$ dell'energia.
(1.6) Discutere qualitativamente le curve di livello nel piano $(x, y) = (x, \dot{x})$.
(1.7) Verificare che la traiettoria con condizioni iniziali $(x(0), \dot{x}(0)) = (0, \sqrt{2})$ è periodica.
(1.8) Scriverne il periodo T come integrale definito.
(1.9) Stimare il periodo T.

ESERCIZIO 2. Si consideri un punto materiale di massa $m = 1$ soggetto a una forza centrale di energia potenziale

$$V(\rho) = -\frac{1}{2\rho^4} + \frac{1}{6\rho^6} + \frac{\alpha}{2\rho^2},$$

con $\alpha \in \mathbb{R}$. Si discuta il moto della variabile $\rho(t)$, rispondendo alle domande seguenti al variare del parametro α e del modulo L del momento angolare del sistema.
(1) Scrivere l'equazione del moto per la variabile ρ e il sistema dinamico associato.
(2) Determinare i punti d'equilibrio e discuterne la stabilità.
(3) Disegnare il grafico del potenziale efficace.
(4) Analizzare qualitativamente le orbite nel piano $(\rho, \dot{\rho})$.
(5) Determinare le traiettorie periodiche nel piano $(\rho, \dot{\rho})$.
(6) Discutere le condizioni sotto le quali in generale il moto complessivo del sistema è periodico.

ESERCIZIO 3. Dato un sistema di riferimento $\kappa = Oxyz$ (sistema assoluto), si consideri anche un sistema di riferimento mobile $K = O'\xi\eta\zeta$ (sistema relativo), la cui origine O' si muove nel piano (x, y) lungo il profilo $y(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$; la componente lungo l'asse x del vettore che individua il punto O' varia secondo la legge $x_{O'}(t) = t$.

L'asse ζ di K si mantiene sempre paralello all'asse z di κ, mentre l'asse ξ si mantiene sempre tangente alla curva $y = y(x)$.

Un punto materiale P di massa $m = 1$ si muove lungo l'asse ξ con legge oraria $\xi(t) = a \sin bt$, con a, b costanti positive.
(1) Scrivere la trasformazione rigida D: $K \to \kappa$ come composizione di una traslazione C con una rotazione B, *i.e.* $D = CB$, e determinare C e B.
(2) Scrivere la soluzione delle equazioni del moto $\mathbf{q(t)}$ nel sistema assoluto e $\mathbf{Q(t)}$ nel sistema mobile.
(3) Determinare la velocità assoluta $\mathbf{v}$.
(4) Determinare la velocità relativa $\mathbf{v'}$.
(5) Determinare la componente traslatoria della velocità di trascinamento $\mathbf{v_0}$.
(6) Determinare la componente rotatoria della velocità di trascinamento $\mathbf{v_T}$.
(7) Determinare la forza di Coriolis che agisce sul punto P.
(8) Determinare la forza centrifuga che agisce sul punto P.