Corso di laurea in Matematica

Sistemi dinamici – Primo Modulo

Prova d'esonero del 22-12-2000

CORREZIONE

Esercizio 1.

(1.1) Data l'energia potenziale

$$V(x) = e^{2x^2}\left(2x^2-1\right)\left(x^2-1\right)^2,$$

si ha

$$\begin{aligned} V'(x) = \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x} &= e^{2x^2}4x\left(x^2-1\right)\left[\left(2x^2-1\right)\left(x^2-1\right)+\left(x^2-1\right)+\left(2x^2-1\right)\right] \\ &= e^{2x^2}4x\left(x^2-1\right)\left(2x^4-1\right). \end{aligned}$$

L'equazione del moto è quindi

$$\ddot{x} = -V'(x) = -e^{2x^2}4x\left(x^2-1\right)\left(2x^4-1\right).$$

(1.2) Si ha

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = y\dot{y} + V'(x)\dot{x} = \dot{x}\ddot{x} + V'(x)\dot{x} = \dot{x}\left(\ddot{x} + V'(x)\right) = 0.$$

(1.3) I punti stazionari di $V(x)$ sono i valori x tali che $V'(x)=0$, quindi tali che valga una delle seguenti relazioni:

$$\begin{cases} x = 0, \\ x^2 = 1, \\ x^4 = 1/2; \end{cases}$$

quindi sono i 5 valori

$$x = 0, \qquad x = \pm 1, \qquad x = \pm\frac{1}{2^{1/4}} \equiv \pm x_0.$$

Si ha

$$\begin{aligned} &V(0) = -1, \\ &V(\pm x_0) = e^{\sqrt{2}}\left(\sqrt{2}-1\right)\frac{3-2\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2}e^{\sqrt{2}}\left(5\sqrt{2}-7\right) > 0, \\ &V(\pm 1) = 0, \end{aligned}$$

inoltre, per $x \to \pm\infty$, si ha $V(x) \to \infty$.

Poiché la funzione $V(x)$ è continua e definita per ogni $x \in \mathbb{R}$, possiamo concludere che $x=0$ e $x=\pm 1$ sono punti di minimo, mentre $x = \pm x_0$ sono punti di massimo. La funzione $V(x)$ è rappresentata in Fig. 1.1

Quindi i punti d'equilibrio sono 5:

$$P_0 = (0,0), \qquad P_{\pm 1} = (\pm x_0, 0), \qquad P_{\pm 2} = (\pm 1, 0).$$

(1.4) I punti P_0, P_{-2} e P_2 saranno punti d'equilibrio stabile, mentre i punti P_{-1} e P_1 saranno punti d'equilibrio instabile, come implica la seguente discussione.

Poiché i punti $x = 0$ e $x = \pm x_0$ sono punti di minimo per l'energia potenziale $V(x)$, per il Teorema di Lagrange i punti P_0, P_{-2} e P_2 sono punti d'equilibrio stabile per il sistema dinamico corrispondente

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -V'(x); \end{cases}$$

basta infatti prendere

$$W(x, y) = \frac{1}{2}y^2 + V(x) - V(0)$$

oppure

$$W(x, y) = \frac{1}{2}y^2 + V(x) - V(\pm x_0)$$

come funzione di Lyapunov.

Riguardo ai punti $P_{\pm 2}$ basta analizzare le curve di livello (cfr. il punto (1.6) successivo). Alternativamente si può studiare il sistema linearizzato e verificare che uno dei due autovalori corrispondenti ha parte reale negativa: infatti tale matrice è data da

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -V''(x_0) & 0 \end{pmatrix},$$

dove

$$\begin{aligned} V''(x_0) &= 4e^{2x_0^2}\left(14x_0^6 - 10x_0^4 - 3x_0^2 + 1\right) = 4e^{\sqrt{2}}\left(\frac{14}{2\sqrt{2}} - \frac{10}{2} - \frac{3}{\sqrt{2}} + 1\right) \\ &= 4e^{\sqrt{2}}\left(4\sqrt{2} - 4\right) = 8\sqrt{2}e^{\sqrt{2}}\left(\sqrt{2} - 1\right) < 0; \end{aligned}$$

quindi gli autovalori λ di A sono dati da

$$\lambda = \pm\sqrt{-V''(x_0)},$$

così che sono reali, uno positivo e uno negativo.

(1.5) Per $E = 0$ si ha

$$y = \pm y(x) = \pm\sqrt{E - V(x)} = \pm\sqrt{2e^{2x^2}\left(1 - 2x^2\right)\left(x^2 - 1\right)^2},$$

che è definita per x tale che $2x^2 \leq 1$ oppure $x^2 = 1$. Per $2x^2 \leq 1$, *i.e.* per $|x| \leq 1/\sqrt{2}$, possiamo scrivere

$$y = \pm y(x) = \pm e^{x^2}\left|x^2 - 1\right|\sqrt{2\left(2x^2 - 1\right)} = \pm e^{x^2}\left(1 - x^2\right)\sqrt{2\left(2x^2 - 1\right)},$$

che è rappresentata in Fig. 1.2.

Quindi la curva di livello

$$\Gamma_0 = \left\{(x, y)\ :\ \frac{1}{2}y^2 + V(x) = 0\right\}$$

contiene i due punti d'equilibrio $P_{\pm 2} = (\pm 1, 0)$ e la curva $\pm y(x)$.

(1.6) Si ha $E \geq V(0) = -1$. Per $E = -1$ si ha $\Gamma_E = \{P_0\}$. Per ogni $E \in (-1, 0)$ si ha un'orbita chiusa contenente il punto P_0 al suo interno. Per $E = 0$ la curva di livello Γ_0 è come descritta al punto (1.5): contiene tre componenti connesse costituite dai due punti d'equilibrio $P_{\pm 2}$ e da un'orbita chiusa simile a quelle che si hanno per $E \in (-1, 0)$. Per $E \in (0, V(x_0))$ si hanno tre orbite chiuse, contenenti, rispettivamente, i punti P_{-1}, P_0, P_1 al loro interno. Per $E = V(x_0)$ la curva di livello Γ_E contiene i due punti d'equilibrio $P_{\pm 1}$ e 4 archi sui quali il moto è asintotico ai due punti d'equilibrio. Per ogni $E > V(x_0)$ la corrispondente curva di livello Γ_E contiene un'unica orbita chiusa. Cfr. la Fig. 1.3.

(1.7) L'energia corrispondente al dato iniziale scelto è data da

$$E(x(0),\dot{x}(0)) = E(0,\sqrt{2}) = \frac{1}{2}2 + V(0) = 1 - 1 = 0.$$

Quindi il dato iniziale $(x(0),\dot{x}(0)) = (0,\sqrt{2})$ si trova sulla componente di Γ_0 costituita da un'orbita chiusa: quindi la traiettoria corrispondente è periodica.

(1.8) Per $E = 0$ e $|x| \leq 1/\sqrt{2}$ si ha, come visto al punto (1.5),

$$\sqrt{2(E - V(x))} = \sqrt{-2V(x)} = e^{x^2}\left(1 - x^2\right)\sqrt{2\left(1 - 2x^2\right)},$$

e risulta $E = V(x)$ per $x = \pm 1/\sqrt{2}$, così che si ha

$$T = 2\int_{-1/\sqrt{2}}^{1/\sqrt{2}} \frac{\mathrm{d}x}{e^{x^2}\left(1 - x^2\right)\sqrt{2\left(1 - 2x^2\right)}},$$

che esprime il periodo della traiettoria con dato iniziale $(x(0),\dot{x}(0)) = (0,\sqrt{2})$ come integrale definito.

(1.9) Se definiamo

$$\Phi(x) = 2e^{2x^2}\left(1 - x^2\right)^2,$$

possiamo scrivere

$$E - V(x) = e^{2x^2}\left(x^2 - 1\right)^2\left(1 - 2x^2\right) = \Phi(x)\left(x + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - x\right),$$

così che

$$T = 2\int_{-1/\sqrt{2}}^{1/\sqrt{2}} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2\Phi(x)\left(x + (1/\sqrt{2})\right)\left((1/\sqrt{2}) - x\right)}}.$$

Si vede facilmente che per $|x| < 1/\sqrt{2}$ si ha

$$\frac{1}{2} = 2\cdot e^0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \leq \Phi(x) \leq 2\cdot e^{2/2}\cdot 1 = 2e,$$

così che se definiamo

$$C_1 = 1, \qquad C_2 = 2e,$$

e, corrispondentemente,

$$T_1 = \sqrt{\frac{2\pi^2}{C_2}} = \frac{\pi}{\sqrt{e}}, \qquad T_2 = \sqrt{\frac{2\pi^2}{C_1}} = 2\pi,$$

si ottiene $T_1 \leq T \leq T_2$, *i.e.*

$$\frac{\pi}{\sqrt{e}} \leq T \leq 2\pi.$$

<u>Esercizio 2.</u>

(2.1) L'energia potenziale efficace è data da

$$V_{\text{eff}}(\rho) = V(\rho) + \frac{L^2}{2\rho^2} = -\frac{1}{2\rho^4} + \frac{1}{6\rho^6} + \frac{\alpha}{2\rho^2} + \frac{L^2}{2\rho^2},$$

dove $L = \|\mathbf{L}\|$, se $\mathbf{L}$ è il momento angolare del sistema, così che l'equazione del moto per la variabile radiale ρ è data da

$$\ddot\rho = -\frac{\partial V_{\text{eff}}(\rho)}{\partial \rho} \equiv -V_{\text{eff}}'(\rho), \qquad V_{\text{eff}}'(\rho) = V'(\rho) - \frac{L^2}{\rho^3},$$

così che si ottiene

$$\ddot\rho = -\frac{2}{\rho^5} + \frac{1}{\rho^7} + \frac{\alpha}{\rho^3} + \frac{L^2}{\rho^3} = \rho^{-7}\left(1 - 2\rho^2 + \beta\rho^4 + L^2\rho^4\right).$$

Abbiamo quindi un sistema unidimensionale che descrive un punto materiale di massa $m = 1$ sottoposto a una forza di energia potenziale (efficace)

$$V_{\text{eff}}(\rho) = V(\rho) + \frac{L^2}{2\rho^2} = -\frac{1}{2\rho^4} + \frac{1}{6\rho^6} + \frac{\beta}{2\rho^2}, \qquad \beta = \alpha + L^2;$$

poiché $\alpha \in \mathbb{R}$, al variare di α e L si avrà $\beta \in \mathbb{R}$.

Se definiamo $y = \dot\rho$, il sistema dinamico associato è dato da

$$\begin{cases} \dot\rho = y, \\ \dot y = -V_{\text{eff}}'(\rho). \end{cases}$$

(2.2) Studiamo dunque la funzione $V_{\text{eff}}(\rho)$ al variare di β. Notiamo innanzitutto che risulta

$$\lim_{\rho\to 0} V_{\text{eff}}(\rho) = \infty,$$

poiché per ρ piccolo nell'energia potenziale efficace domina il termine $1/(6\rho^6)$.

Inoltre se $\beta > 0$ si ha

$$\lim_{\rho\to\infty} V_{\text{eff}}(\rho) = 0^+,$$

poiché per ρ grande domina il termine $\beta/(2\rho^2) > 0$, mentre se $\beta \le 0$ si ha

$$\lim_{\rho\to\infty} V_{\text{eff}}(\rho) = 0^-,$$

poiché per ρ grande se $\beta < 0$ domina il termine $\beta/(2\rho^2) < 0$ e se $\beta = 0$ domina il termine $-1/(2\rho^4) < 0$.

Si ha

$$V_{\text{eff}}'(\rho) = \frac{2}{\rho^5} - \frac{1}{\rho^7} - \frac{\beta}{\rho^3} = -\rho^{-7}\left(1 - 2\rho^2 + \beta\rho^4\right).$$

Risulta allora $V_{\text{eff}}'(\rho) = 0$ per ρ tale che

$$\rho^2 = \frac{1}{\beta}\left(1 \pm \sqrt{1-\beta}\right).$$

Definendo

$$\Delta = 1 - \beta,$$

si vede che l'equazione $V_{\text{eff}}'(\rho) = 0$ ammette due radici, una sola radice e nessuna radice, a seconda che sia $\Delta > 0$, $\Delta = 0$ e $\Delta < 0$.

Se $\beta > 1$ si ha $\Delta < 0$: quindi in tal caso non esistono punti d'equilibrio per il sistema dinamico associato.

Se $\beta = 1$ si ha $\Delta = 0$ e, corrispondentemente, la radice

$$\rho_0 = 1;$$

inoltre $V_{\text{eff}}(\rho)' < 0$ per ogni $\rho \neq \rho_0$, quindi la funzione $V_{\text{eff}}(\rho)$ è strettamente decrescente per $\rho \neq \rho_0$ e ha in ρ_0 un punto di flesso. Possiamo perciò concludere che $(\rho, \dot{\rho}) = (\rho_0, 0)$ è un punto d'equilibrio instabile per il sistema dinamico associato.

Se $\beta \in (0, 1)$ si ha $\Delta > 0$ e, corrispondentemente, si hanno due radici ρ_1 e ρ_2 tali che

$$\rho_1^2 = \frac{1 - \sqrt{\Delta}}{\beta}, \qquad \rho_2^2 = \frac{1 + \sqrt{\Delta}}{\beta};$$

ovviamente si avrà

$$\rho_1 = \sqrt{\frac{1 - \sqrt{\Delta}}{\beta}}, \qquad \rho_2 = \sqrt{\frac{1 + \sqrt{\Delta}}{\beta}},$$

poiché solo le determinazioni positive di ρ hanno significato.

Visti gli andamenti per $\rho \to 0$ e per $\rho \to \infty$ possiamo concludere che ρ_1 è un punto di minimo e ρ_2 è un punto di massimo: quindi $(\rho, \dot{\rho}) = (\rho_1, 0)$ è un punto d'equilibrio stabile per il sistema dinamico associato (per il Teorema di Lagrange), mentre $(\rho, \dot{\rho}) = (\rho_2, 0)$ è un punto d'equilibrio instabile.

Se $\beta = 0$ l'energia potenziale efficace si riduce a

$$V_{\text{eff}}(\rho) = -\frac{1}{2\rho^4} + \frac{1}{6\rho^6},$$

così che si ha

$$V'_{\text{eff}}(\rho) = \frac{2}{\rho^5} - \frac{1}{\rho^7} = -\frac{1}{\rho^7}\left(1 - 2\rho^2\right),$$

che si annulla per ρ tale che $\rho^2 = 1/2$: si trova quindi l'unica radice

$$\rho_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Poiché $V_{\text{eff}}(\rho) \to \infty$ per $\rho \to 0^-$ e $V_{\text{eff}}(\rho) \to 0$ per $\rho \to \infty$, tale punto costitusce un punto di minimo per $V_{\text{eff}}(\rho)$, quindi quindi $(\rho, \dot{\rho}) = (\rho_3, 0)$ è un punto d'equilibrio stabile per il sistema dinamico associato (per il Teorema di Lagrange).

Infine per $\beta < 0$, se definiamo $\gamma = -\beta > 0$, si ottiene

$$\rho^2 = \frac{1}{\gamma}\left(\pm\sqrt{1 + \gamma} - 1\right),$$

così che solo la determinazione con il segno positivo è possibile; corrispondentemente si trova la radice

$$\rho_4 = \sqrt{\frac{\sqrt{1 + \gamma} - 1}{\gamma}}.$$

Poiché $V_{\text{eff}}(\rho) \to \infty$ per $\rho \to 0^-$ e $V_{\text{eff}}(\rho) \to 0$ per $\rho \to \infty$, possiamo concludere che ρ_4 è un punto di minimo per il potenziale efficace e quindi $(\rho, \dot{\rho}) = (\rho_4, 0)$ è un punto di equilibrio stabile per il sistema dinamico associato (per il Teorema di Lagrange).

(2.3) Per $\beta > 1$ la funzione $V_{\text{eff}}(\rho)$ è strettamente decrescente. Cfr. la Fig. 2.1.

Per $\beta = 1$ si deve avere $V_{\text{eff}}(\rho_0) > 0$ poiché $V'_{\text{eff}}(\rho) < 0$ per ogni $\rho \neq \rho_0$ e per $\rho \to \infty$ la funzione $V_{\text{eff}}(\rho)$ tende a 0^+; del resto un conto esplicito dà, per $\beta = 1$,

$$V_{\text{eff}}(\rho_0) = V_{\text{eff}}(1) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Cfr. la Fig. 2.2.

Nel caso $\beta \in (0,1)$ si ha

$$\begin{aligned} V_{\rm eff}(\rho_1) &= \frac{1}{6\rho_1^6}\left[1-3\rho_1^2+3\beta\rho_1^4\right] = \frac{1}{6\rho_1^6}\left[1-\frac{3}{\beta}\left(1-\sqrt{\Delta}\right)+\frac{3\beta}{\beta^2}\left(1+\Delta-2\sqrt{\Delta}\right)\right] \\ &= \frac{1}{6\rho_1^6\beta}\left[\beta-3+3\sqrt{\Delta}+6-3\beta-6\sqrt{\Delta}\right] = \frac{1}{6\rho_1^6\beta}\left[3-2\beta-3\sqrt{\Delta}\right], \end{aligned}$$

così che si ha $V_{\rm eff}(\rho_1) > 0$ se e solo se $3-2\beta > 3\sqrt{\Delta}$, *i.e.*

$$9+4\beta^2-12\beta = (3-2\beta)^2 > \left(3\sqrt{\Delta}\right)^2 = 9\Delta = 9-9\beta,$$

i.e. se e solo se

$$\beta > \frac{3}{4}.$$

È facile verificare invece che si ha $V_{\rm eff}(\rho_2) > 0$ comunque si scelga $\beta \in (0,1)$. Infatti si ha

$$\begin{aligned} V_{\rm eff}(\rho_2) &= \frac{1}{6\rho_2^6}\left[1-3\rho_2^2+3\beta\rho_2^4\right] = \frac{1}{6\rho_2^6}\left[1-\frac{3}{\beta}\left(1+\sqrt{\Delta}\right)+\frac{3\beta}{\beta^2}\left(1+\Delta+2\sqrt{\Delta}\right)\right] \\ &= \frac{1}{6\rho_2^6\beta}\left[\beta-3-3\sqrt{\Delta}+6-3\beta+6\sqrt{\Delta}\right] = \frac{1}{6\rho_2^6\beta}\left[3-2\beta+3\sqrt{\Delta}\right], \end{aligned}$$

dove $3-2\beta+3\sqrt{\Delta} > 0$, poiché

$$9-9\beta = 9\Delta = \left(3\sqrt{\Delta}\right)^2 > (2\beta-3)^2 = 4\beta^2+9-12\beta$$

per $\beta < 3/4$.

Quindi per $\beta \in (0,1)$ il potenziale efficace $V_{\rm eff}(\rho)$ è come rappresentato in Fig. 2.3(a) per $\beta > 3/4$, è come rappresentato in Fig. 2.3(b) per $\beta < 3/4$ ed è come rappresentato in Fig. 2.3(c) per $\beta = 3/4$.

Per $\beta = 0$ si ha un minimo in $\rho = \rho_3$; poiché $V_{\rm eff}(\rho) \to 0^-$ per $\rho \to \infty$ si deve avere $V_{\rm eff}(\rho_3) < 0$, come è facile verificare. Infatti si ha

$$V_{\rm eff}(\rho_3) = \frac{1}{6\rho_3^6}\left[1-3\rho_4^2\right] = \frac{4}{3}\left(1-\frac{3}{2}\right) < 0.$$

Cfr. la Fig. 2.4.

Per $\beta < 0$ si ha un minimo in $\rho = \rho_4$; poiché $V_{\rm eff}(\rho) \to 0^-$ per $\rho \to \infty$ si deve avere $V_{\rm eff}(\rho_4) < 0$, come è facile verificare. Infatti si ha

$$\begin{aligned} V_{\rm eff}(\rho_4) &= \frac{1}{6\rho_4^6}\left[1-3\rho_4^2-3\gamma\rho_4^4\right] = \frac{1}{6\rho_4^6}\left[1-\frac{3}{\gamma}\left(\sqrt{1+\gamma}-1\right)-\frac{3\gamma}{\gamma^2}\left(2+\gamma-2\sqrt{1+\gamma}\right)\right] \\ &= \frac{1}{6\rho_4^6\gamma}\left[\gamma-3\sqrt{1+\gamma}+3-6-3\gamma+6\sqrt{1+\gamma}\right] = \frac{1}{6\rho_4^6\beta}\left[-3-2\gamma+3\sqrt{1+\gamma}\right], \end{aligned}$$

dove $3\sqrt{1+\gamma}-2\gamma-3 < 0$, poiché

$$9+9\gamma = \left(3\sqrt{1+\gamma}\right)^2 < (2\gamma+3)^2 = 4\gamma^2+9+12\gamma$$

per ogni $\gamma > 0$. Cfr. la Fig. 2.5.

(2.4) Dalla forma del potenziale efficace si determina la forma delle orbite nel piano $(\rho,\dot\rho)$. Si ottengono per i vari casi, rispettivamente, le Fig. 2.6, 2.7, 2.8, 2.7, 2.8, 2.9 e 2.10, dove sono rappresentate le curve di livello dell'energia

$$\Gamma_E = \left\{(\rho,\dot\rho) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \;:\; \frac{1}{2}\dot\rho^2 + V_{\rm eff}(\rho) = E\right\}.$$

Si noti che nel caso $\beta \in (0,1)$ le curve di livello hanno sempre lo stesso andamento qualitativo, indipendentemente dal fatto che β sia maggiore o minore di $3/4$.

(2.5) Si vede quindi dai grafici delle curve di livello che si possono avere moti periodici per la variabile ρ solo per $\beta < 1$.

Indichiamo i dati iniziali con $(\rho(0), \dot{\rho}(0))$ e sia E il corrispondente valore di energia.

Se $\beta \in (0,1)$ si hanno moti periodici per la variabile radiale quando i dati iniziali sono tali che

$$\begin{cases} V_{\text{eff}}(\rho_1) < E < V_{\text{eff}}(\rho_2), \\ \rho(0) < \rho_2; \end{cases}$$

se $\beta = 0$ si hanno moti periodici per la variabile radiale quando i dati iniziali sono tali che

$$V_{\text{eff}}(\rho_3) < E < 0;$$

se infine $\beta < 0$ si hanno moti periodici per la variabile radiale quando i dati iniziali sono tali che

$$V_{\text{eff}}(\rho_4) < E < 0.$$

(2.6) Le condizioni sotto cui il moto complessivo risulta periodico sono le seguenti.

In primo luogo deve essere costante o periodico il moto della variabile radiale, *i.e.* o deve esssere $\rho(t) = \rho(0)$ per ogni $t \in \mathbb{R}$ o deve esistere $T > 0$ tale che $\rho(t) = \rho(t+T)$ per ogni $t \in \mathbb{R}$.

Nel primo caso si ha

$$\dot{\theta}(t) = \frac{L}{\rho^2(t)} = \frac{L}{\rho^2(0)} \equiv \omega,$$

e quindi $\theta(t) = \theta(0) + \omega t$ per ogni $t \in \mathbb{R}$: quindi il punto materiale compie un moto circolare uniforme con velocità angolare ω. Questo è dunque possibile se si sceglie un dato iniziale $(\rho(0), \dot{\rho}(0))$ tale che la velocità iniziale sia $\dot{\rho}(0) = 0$ e, per il valore iniziale della variabile radiale, si abbia $\rho(0) = \rho_0$ se $\beta = 1$, $\rho(0) = \rho_1$ oppure $\rho(0) = \rho_2$ se $\beta \in (0,1)$, $\rho(0) = \rho_3$ se $\beta = 0$ e $\rho(0) = \rho_4$ se $\beta < 0$.

Nel secondo caso, se $\Delta\theta$ indica l'incremento della variabile θ in un periodo del moto della variabile radiale (*i.e.* in un tempo T), così che

$$\Delta\theta = 2 \int_{\rho_-}^{\rho_+} \frac{\mathrm{d}\rho}{\rho^2 \sqrt{(2/L^2)\,(E - V_{\text{eff}}(\rho))}} \,,$$

deve risultare

$$\Delta\theta / 2\pi \in \mathbb{Q} \,,$$

i.e. $\Delta\theta$ deve essere commensurabile con 2π.

Questo vuol dire che i dati iniziali, individuabili dando i valori $(L, E, \rho(0), \theta(0))$ nonché il segno di $\dot{\rho}(0)$, devono essere tali che tale condizione sia soddisfatta.

ESERCIZIO 3.

(3.1) Nel sistema κ il punto O' ha coordinate

$$\mathbf{q}_{O'} = (t, y(t), 0) = (t, t^3 - 6t^2 + 9t, 0).$$

Si ha quindi

$$\mathbf{q} = D\mathbf{Q} = CB\mathbf{Q} = B\mathbf{Q} + \mathbf{r},$$

con

$$\mathbf{r} = (t, y(t), 0) = (t, t^3 - 6t^2 + 9t, 0)$$

e, tenuto conto che l'angolo $\theta(t)$ che l'asse ξ forma con l'asse x è tale che $\tan\theta(t) = \dot{y}(t) \equiv \mathrm{d}y(t)/\mathrm{d}t$,

$$B = \begin{pmatrix} \cos\theta(t) & -\sin\theta(t) & 0 \\ \sin\theta(t) & \cos\theta(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \theta(t) = \arctan\left(3t^2 - 12t + 9\right).$$

Quindi la trasformazione rigida D: $K \to \kappa$ è data dalla composizione della rotazione B con la traslazione C, definita da $C\mathbf{x} = \mathbf{x} + \mathbf{r}$.

La situazione è come rappresentata in Fig. 3.1. Infatti, per determinare il profilo $y = y(x) = y(t)$, si tenga conto che si ha

$$\lim_{t\to\pm\infty} y(t) = \pm\infty,$$

mentre

$$\dot{y}(t) = 3\left(t^2 - 4t + 3\right) = 0$$

ammette soluzione per t tale che $t = 2 \pm \sqrt{2-3} = 2 \pm 1$, *i.e.* per $t = 1$ e per $t = 3$; corrispondemente si ha $y(1) = 4$ e $y(3) = 0$. Inoltre $y(0) = 0$.

(3.2) Scriviamo $\mathbf{q} = (x, y, z)$ e $\mathbf{Q} = (\xi, \eta, \zeta)$. Si ha quindi

$$\mathbf{Q}(t) = \begin{cases} \xi(t) = a\sin bt, \\ \eta(t) = 0, \\ \zeta(t) = 0, \end{cases}$$

mentre

$$\mathbf{q}(t) = D\mathbf{Q}(t) = \begin{cases} x(t) = a\sin bt\cos\theta(t) + t, \\ y(t) = a\sin bt\sin\theta(t) + y(t), \\ z(t) = 0. \end{cases}$$

(3.3) La velocità assoluta $\mathbf{v}$ è data da

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{q}}\,.$$

Quindi si ha

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \Big(ab\cos bt\cos\theta(t) - a\dot{\theta}(t)\sin bt\sin\theta(t) + 1, ab\cos bt\sin\theta(t) + a\dot{\theta}(t)\sin bt\cos\theta(t) + \dot{y}(t), 0\Big) \\ &= \Big(ab\cos bt\cos\theta(t) - a\dot{\theta}(t)\sin bt\sin\theta(t) + 1, ab\cos bt\sin\theta(t) + a\dot{\theta}(t)\sin bt\cos\theta(t) + 3t^2 - 12t + 9, 0\Big), \end{aligned}$$

dove

$$\dot{\theta}(t) = \frac{6t - 12}{1 + \left(3t^2 - 12t + 9\right)^2}.$$

(3.4) La velocità relativa $\mathbf{v}'$ è data da

$$\mathbf{v}' = B\dot{\mathbf{Q}},$$

dove

$$\dot{\mathbf{Q}} = (ab\cos bt, 0, 0).$$

Quindi si ha

$$\mathbf{v}' = (ab\cos bt\cos\theta(t), ab\cos bt\sin\theta(t), 0)\,.$$

(3.5) La componente traslatoria della velocità di trascinamento $\mathbf{v}_0$ è data da

$$\mathbf{v}_0 = \dot{\mathbf{r}}.$$

Quindi

$$\mathbf{v}_0 = (1, \dot{y}(t), 0) = (1, 3t^2 - 12t + 9, 0).$$

(3.6) La componente rotatoria della velocità di trascinamento $\mathbf{v}_T$ è data da

$$\mathbf{v}_T = [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{q} - \mathbf{r}] \, ,$$

dove

$$\boldsymbol{\omega} = (0, 0, \dot{\theta}(t)).$$

Quindi, tenuto conto che

$$\mathbf{q} - \mathbf{r} = (a \sin bt \cos t, a \sin bt \sin t, 0) \, ,$$

si ha

$$\mathbf{v}_T = \left(-a\dot{\theta}(t) \sin bt \sin \theta(t), a\dot{\theta}(t) \sin bt \cos \theta(t), 0 \right) .$$

Si può facilmente verificare che l'identità $\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_T$ è soddisfatta.

(2.7) La forza di Coriolis $\mathbf{F}_2$ è data da

$$\mathbf{F}_2 = -2 \left[\boldsymbol{\Omega}, \dot{\mathbf{Q}} \right] \, ,$$

dove $\boldsymbol{\Omega} = B\boldsymbol{\Omega} = (0, 0, \dot{\theta}(t))$. Quindi

$$\mathbf{F}_2 = (0, -2ab\dot{\theta}(t) \cos bt, 0) \, .$$

(2.8) La forza centrifuga $\mathbf{F}_3$ è data da

$$\mathbf{F}_3 = - \left[\boldsymbol{\Omega}, [\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{Q}] \right] .$$

Poiché

$$[\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{Q}] = (0, a\dot{\theta}(t) \sin bt, 0),$$

si ha quindi

$$\mathbf{F}_3 = (a\dot{\theta}^2(t) \sin bt, 0, 0).$$