Corso di laurea in Matematica

FM1 - Equazioni differenziali e meccanica

Prova d'esonero del 10-04-02

Esercizio. Sia dato il sistema dinamico planare

$$\begin{cases} \dot{x} = 2y + 2x^2 - x^4 - 1, \\ \dot{y} = -2x \left(2y - 3x^4 + 4x^2 - 2x^2 y - 1\right). \end{cases}$$

(1) Verificare che la funzione

$$H(x,y) = \left(y + x^2 - 1\right)\left(y - x^4 + x^2\right)$$

è una una costante del moto.
(2) Determinare i punti d'equilibrio.
(3) Discuterne la stabilità.
(4) Analizzare le traiettorie lungo la curva di livello che corrispondono al valore $H(x,y) = 0$.
(5) Discutere qualitativamente le altre traiettorie.
(6) Individuare i dati iniziali da cui si originano traiettorie periodiche.
(7) Verificare che la traiettoria con dato iniziale $(\bar{x}, \bar{y}) = (0, (2+\sqrt{3})/4)$ è periodica.
(8) Scriverne il periodo come integrale definito.