Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2006/2007

FM1 - Equazioni differenziali e meccanica

PRIMA PROVA D'ESONERO (09-04-2008)

CORREZIONE

ESERCIZIO 1. Si dimostra per induzione che

$$A^{2k-1} = \lambda^{k-1} A, \qquad A^{2k} = \lambda^{k-1} A^2,$$

per $k \geq 1$. Per $k = 1$ questo è ovvio. Assumendo le due relazioni soddisfatte fino a k, si ha $A^{2k+1} = A\,A^{2k} = A\,\lambda^{k-1} A^2 = \lambda^{k-1} A^3 = \lambda^k A$ e $A^{2k+2} = A\,A^{2k+1} = A\,\lambda^k A = \lambda^k A^2$.

Quindi

$$\begin{aligned} \exp A &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} = \mathbb{1} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A^{2k-1}}{(2k-1)!} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A^{2k}}{(2k)!} \\ &= \mathbb{1} + A \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(2k-1)!} + A^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(2k)!}, \end{aligned}$$

ovvero

$$\exp A = \mathbb{1} + c_1 A + c_2 A^2, \qquad c_1 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(2k-1)!} + \qquad c_2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(2k)!}.$$

ESERCIZIO 2.

2.1. Punti d'equilibrio. Si ha

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x\left(x^2 + y^2\right) - 2x\left(2 - x^2\right), \\ \dot{y} = -2y\left(2 - x^2\right), \end{cases}$$

così che si ha $\dot{y} = 0$ o per $y = 0$ o per $x^2 = 2$. Se $y = 0$ si ha $\dot{x} = 0$ per $4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1) = 0$, ovvero per $x = 0$ oppure $x = \pm 1$. Se invece $x^2 = 2$ si ha $\dot{x} = 0$ per $2x(x^2 + y^2) = \pm 2\sqrt{2}(2 + y^2) = 0$, che non è mai soddisfatta. In conclusione abbiamo i tre punti d'equilibrio $(0, 0)$, $(-1, 0)$ e $(1, 0)$.

2.2. Stabilità dei punti d'equilibrio. Possiamo riscrivere il sistema come

$$\begin{cases} \dot{x} = 4x^3 - 4x + 2xy^2, \\ \dot{y} = -4y + 2yx^2, \end{cases}$$

quindi la matrice del sistema linearizzato nell'intorno del punto d'equilibrio (x_0, y_0) è data da

$$A(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} 12x_0^2 - 4 + 2y_0^2 & 4x_0 y_0 \\ 4x_0 y_0 & -4 + 2x_0^2 \end{pmatrix}.$$

Si ha

$$A(0, 0) = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}, \qquad A(\pm 1, 0) = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

che hanno autovalori, rispettivamente, -4 (con molteplicità 2) e $8, -4$.

Poiché gli autovalori di $A(0,0)$ sono entrambi negativi possiamo concludere che $(0,0)$ è un punto d'equilibrio asintoticamente stabile.

Poiché uno degli autovalori di $A(\pm 1,0)$ è positivo possiamo concludere che sia $(-1,0)$ sia $(1,0)$ sono punti d'equilibrio instabile.

2.3. Analisi qualitativa. Per studiare le traiettorie del sistema consideriamo le curve di livello

$$\Sigma_c = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : V(x,y) = c \right\}$$

della funzione $V(x,y)$, tenendo conto che le traiettorie attraversano ortogonalmente tali curve. Se poniamo

$$V(x,y) = \left(x^2 + y^2\right)\left(2 - x^2\right) = c,$$

abbiamo che se $c = 0$ allora $x^2 = 2$ oppure $x = y = 0$, mentre se $c \neq$ allora $x^2 \neq 2$.

In corrispondenza dei punti d'equilibrio si ha $V(0,0) = 0$ e $V(\pm 1, 0) = 1$. Iniziamo allora dalle curve di livello Σ_0 e Σ_1. caso $c = 0$.

Studiamo innanzitutto il caso $c = 0$. Si ha

$$\Sigma_0 = \mathcal{C}_+ \cup \mathcal{C}_- \cup \{(0,0)\}, \qquad \mathcal{C}_\pm = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = \pm\sqrt{2} \right\},$$

i.e. Σ_0 è costituita dall'origine e dalle due rette $x = \pm\sqrt{2}$.

Se $c \neq 0$ possiamo scrivere

$$y^2 = \frac{c}{2 - x^2} - x^2,$$

ed esprimere y in funzione di x come

$$y = \pm\sqrt{f(x)}, \qquad f(x) := \frac{c}{2 - x^2} - x^2 = \frac{c - 2x^2 + x^4}{2 - x^2}.$$

Le curve di livello Σ_c sono simmetriche per riflessione rispetto all'asse x. Possiamo quindi limitarci a studiare la funzione

$$y = F(x) := \sqrt{f(x)}$$

nel semipiano superiore. Inoltre, poiché la funzione $F(x)$ è pari in x, le curve di livello Σ_c sono simmetriche anche per riflessione rispetto all'asse y. Si deve avere $f(x) \geq 0$, quindi

$$\begin{aligned} x^2 < 2 &\quad\Longrightarrow\quad c - 2x^2 + x^4 \geq 0, \\ x^2 > 2 &\quad\Longrightarrow\quad c - 2x^2 + x^4 \leq 0, \end{aligned}$$

e $f(x) = 0$ se e solo se $c - 2x^2 + x^4 = 0$, ovvero se e solo se

$$x^2 = 1 \pm \sqrt{1 - c}.$$

Ovviamente tale equazione non ammette soluzioni per $c > 1$, e ne ammette due coincidenti ($x^2 = 1$) per $c = 1$. Se invece $0 \leq c < 1$ esistono due soluzioni distinte, mentre se $c < 0$ solo la soluzione $1 + \sqrt{1-c}$ è positiva.

Consideriamo ora la curva di livello Σ_1, i.e. la curva di livello che contiene i punti d'equilibrio instabile. Per $c = 1$ si ha

$$F(x) = \sqrt{\frac{1 - 2x^2 + x^4}{2 - x^2}} = \frac{|x^2 - 1|}{\sqrt{2 - x^2}}.$$

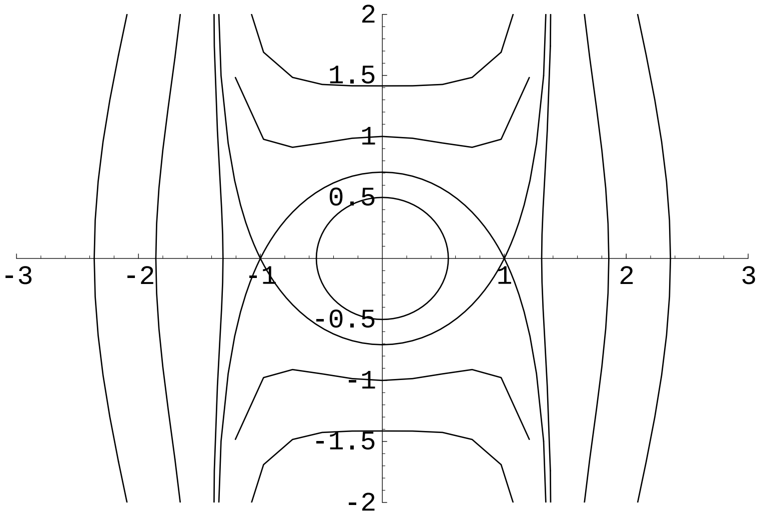

Figura 1. Curve di livello della funzione $V(x, y)$.

Quindi $F(x) = 0$ se e solo se $x = \pm 1$, $x = 0$ è un punto di massimo e si ha

$$\lim_{x \to 1^{\pm}} F'(x) = \pm 1, \qquad \lim_{x \to -1^{\pm}} F'(x) = \pm 1,$$

così che $y = \pm F(x)$ determina due curve, definite per $-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$, simmetriche rispetto all'asse x, che si intersecano trasversalmente sull'asse x in $x = \pm 1$, hanno un punto di minimo in $x = 0$ e tendono a $+\infty$ e a $-\infty$, rispettivamente, per $x \to \pm\sqrt{2}$.

Le altre curve di livello di livello si possono ottenere per continuità usando il fatto che la funzione $V(x, y)$ è regolare. La situazione è come rappresentata in Figura 1.

[Si può anche procedere a uno studio dettagliato delle curve di livello, nel modo seguente. Innanzitutto, si nota che

$$F'(x) := \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x}(x) = \frac{1}{2\sqrt{f(x)}}\, f'(x) = \frac{x}{F(x)} \left(\frac{c}{(2 - x^2)^2} - 1 \right),$$

e quindi $F'(x) = 0$ richiede $x = 0$ oppure, nel caso in cui si abbia $c \geq 0$,

$$(2 - x^2)^2 = c \quad \Longrightarrow \quad 2 - x^2 = \pm\sqrt{c} \quad \Longrightarrow \quad x^2 = 2 \pm \sqrt{c}.$$

Se $c \leq 4$ si hanno due soluzioni distinte (per $c = 4$ una delle due coincide con $x = 0$), mentre se $c > 4$ solo la soluzione $x^2 = 2 + \sqrt{c}$ è positiva. Si ha inoltre

$$F''(x) := \frac{\mathrm{d}^2 F}{\mathrm{d}x^2}(x) = \frac{1}{F(x)} \left(\frac{c}{(2 - x^2)^2} - 1 \right) + x\, G(x),$$

dove il primo addendo si ottiene derivando la x a numeratore in $x/F(x)$ e $G(x)$ tiene conto di tutti gli altri termini. In $x = 0$ si ha $G(0) = 0$ e quindi

$$F''(0) = \frac{c}{2F(0)} \left(\frac{c}{4} - 1 \right) = \sqrt{\frac{c}{2}}\, \frac{c - 4}{4}.$$

Trattiamo separatamente i due casi $c > 0$ e $c < 0$. Studiamo prima il caso $c > 0$. In tal caso si deve avere $|x| < \sqrt{2}$, e si ha

$$\lim_{x \to \sqrt{2}^-} F(x) = \lim_{x \to -\sqrt{2}^+} F(x) = +\infty.$$

Inoltre in tal caso la soluzione $x^2 = 2 + \sqrt{c}$ di $F'(x) = 0$ va scartata poiché è maggiore di 2.

Consideriamo prima il caso $c \geq 4$. In tal caso esiste un unico punto stazionario ($x = 0$) per F, e si ha $F''(0) > 0$ per $c > 4$ e $F''(0) = 0$ per $c = 4$. Quindi $x = 0$ è un punto di minimo e $F(0) = \sqrt{c/2}$.

Se invece $1 < c < 4$ si hanno tre punti stazionari: $x = 0$, $x = -\sqrt{2 - \sqrt{c}}$ e $x = \sqrt{2 - \sqrt{c}}$. Poiché $F(x) \to +\infty$ per $x \to \pm\sqrt{2}$ e $F''(0) < 0$ possiamo concludere che $x = 0$ è un punto di massimo relativo e $x = \pm\sqrt{2 - \sqrt{c}}$ sono punti di minimo assoluto per $F(x)$.

Il caso $c = 1$ è già stato studiato.

Se infine $0 < c < 1$ si ha il quadro seguente. Si deve avere

$$g(x) := x^4 - 2x^2 + c \geq 0.$$

Inoltre

$$g'(x) = 4x^3 - 4x = 4x\left(x^2 - 1\right),$$
$$g''(x) = 12x^2 - 4,$$

quindi $g'(x) = 0$ per $x = 0$ oppure per $x = \pm 1$. Inoltre $g''(0) = -4$ e $g''(\pm 1) = 8$, quindi $x = 0$ è un punto di massimo e $x = \pm 1$ sono punti di minimo. Infine a funzione $g(x)$ si annulla per $x^2 = 1 \pm \sqrt{1 - c}$, dove

$$0 < 1 - \sqrt{1 - c} < 1 < 1 + \sqrt{1 - c} < 2.$$

Quindi $F(x) \geq 0$ per $|x| \leq \sqrt{1 - \sqrt{1 - c}}$ e per $\sqrt{1 + \sqrt{1 - c}} \leq |x| < 2$. Inoltre

$$\lim_{x \to \pm\sqrt{1 - \sqrt{1 - c}}} F(x) = \mp\infty,$$

quindi possiamo concludere che $y = \pm F(x)$ descrive tre curve: una curva chiusa che circonda l'origine e attraversa l'asse x nei due punti $\pm\sqrt{1 - \sqrt{1 - c}}$ con tangente verticale, una curva aperta che attraversa l'asse x nel punto $\sqrt{1 + \sqrt{1 - c}}$ e tende alla retta $x = \sqrt{2}$ per $x \to \sqrt{2}$ e una curva aperta che attraversa l'asse x nel punto $-\sqrt{1 + \sqrt{1 - c}}$ e tende alla retta $x = -\sqrt{2}$ per $x \to -\sqrt{2}$.

Studiamo ora il caso $c < 0$. In tal caso si deve avere $|x| > \sqrt{2}$, e si ha

$$\lim_{x \to \sqrt{2}^+} F(x) = \lim_{x \to -\sqrt{2}^-} F(x) = +\infty.$$

Inoltre in tal caso $F(x)$ non ha punti stazionari poiché $c < 0$ e $x = 0$ è fuori dal dominio di definizione della funzione $F(x)$. Inoltre $F(x) = 0$ per $x^2 = 1 + \sqrt{1 - c}$, i.e. per $x = \pm\sqrt{1 + \sqrt{1 - c}}$. Quindi la funzione $y = \pm F(x)$ descrive due curve aperte, la prima a destra di $x = \sqrt{2}$, definita per $\sqrt{2} < x \leq \sqrt{1 + \sqrt{1 - c}}$ e asintotica alla retta $x = \sqrt{2}$ per $x \to \sqrt{2}$ (in particolare $F(x)$ è decresecente dall'infinto a 0), la seconda ottenuta dalla prima per riflessione rispetto all'asse y.]

Le traiettorie possono allora essere disegnate usando, come anticipato, il fatto che sono ortogonali alle curve di livello di $V(x, y)$. Si ottiene lo scenario di Figura 2.

Figura 2. Analisi qualitativa del sistema.

2.4. Stima del bacino d'attrazione. Per stimare il bacino d'attrazione si può usare il teorema di Barbašin-Krasovskij, prendendo come insieme compatto positivamente invariante un qualsiasi insieme P ottenuto nel modo seguente. Si considera una curva di livello Σ_c per $0 < c < 1$: si prende la componente connessa γ che circonda l'origine e si definisce P l'insieme compatto che contiene l'origine e ha γ come frontiera. (L'insieme così ottenuto è positivamante invariante poiché $V(x,y) = c$ per $(x,y) \in \gamma$ e, poiché $\dot{V}(x,y) = -|\nabla V(x,y)|^2 < 0$ per $(x,y) \in \gamma$, il campo vettoriale su γ spinge verso l'interno.)

Inoltre per $(x,y) \in P$ si ha $\dot{V}(x,y) = 0$ se e solo se $(x,y) = (0,0)$, quindi, definendo $W(x,y) = V(x,y)$ (in modo che si abbia $W(0,0) = 0$), tutte le condizioni del teorema di Barbašin-Krasovskij sono soddisfatte, e possiamo concludere che non solo $(0,0)$ è un punto d'equilibrio asintoticamente stabile (cosa che già conseguiva dall'analisi precedente) ma anche che P è contenuto nel suo bacino d'attrazione. (Si noti che in realtà, come si vede dalla Figura 2, il bacino d'attrazione è molto più grande).

ESERCIZIO 3.

3.2. Soluzione dell'equazione. Per separazione di variabili si ha

$$\int_1^{x(t)} 2x \, \mathrm{d}x = -\int_0^t \frac{3 + 8s + 6s^2}{(s+1)^2(2s+1)^2} \, \mathrm{d}s.$$

Se scriviamo

$$\frac{3 + 8s + 6s^2}{(s+1)^2(2s+1)^2} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{(s+1)^2} + \frac{C}{2s+1} + \frac{D}{(2s+1)^2},$$

troviamo immediatamente

$$A = C = 0, \qquad B = 1, \qquad D = 2.$$

Quindi

$$-\int \frac{3 + 8s + 6s^2}{(s+1)^2(2s+1)^2} = -\int \frac{1}{(s+1)^2} + \frac{2}{(2s+1)^2} = \frac{1}{s+1} + \frac{1}{2s+1}$$

In conclusione si ottiene

$$x^2(t) - x_0^2 = \frac{1}{t+1} + \frac{1}{2t+1} - 2,$$

dove $x(0) = 1$, e pertanto

$$x(t) = \sqrt{\frac{1}{t+1} + \frac{1}{2t+1} - 1},$$

dove si è presa la determinazione positiva della radice poiché $x(0) = x_0 = 1 > 0$.

In particolare la funzione $x(t)$ è definita per $-1/\sqrt{2} \leq t \leq 1/\sqrt{2}$. Quindi

$$x(1/\sqrt{2}) = \lim_{t \to 1/\sqrt{2}} x(t) = 0.$$

ESERCIZIO 6.

6.1. Costante del moto. Cerchiamo la costante del moto $H(x,y)$ richiedendo che si abbia

$$\frac{\partial H}{\partial y} = \dot{x} = x^3 (2y+1) + x(2y-1), \qquad \frac{\partial H}{\partial x} = -\dot{y} = 3x^2 \left(y^2 + y\right) + y(y-1),$$

Integrando la prima equazione rispetto a y si ottiene

$$H(x,y) = xy \left[y \left(x^2 + 1 \right) + \left(x^2 - 1 \right) \right] + c_1(x),$$

dove $c_1(x)$ è una funzione arbitraria di x, e integrando la seconda equazione rispetto a x si ottiene

$$H(x,y) = xy\left[(y+1)\,x^2 + (y-1)\right] + c_2(y),$$

dove $c_2(y)$ è una funzione arbitraria di y. Eguagliando le due espressioni si ottiene

$$H(x,y) = xy\left[y\left(1+x^2\right) + x^2 - 1\right],$$

definita a meno di una costante arbitraria (che abbiamo posto uguale a 0).

6.2. Punti d'equilibrio. Si ha $\dot{x} = 0$ per $x = 0$ oppure $2y + 1 = 2/(1+x^2)$.

Se $x = 0$ si ha $\dot{y} = 0$ se $y(y-1) = 0$, ovvero se $y = 0$ oppure $y = 1$.

Se $2y+1 = 2/(1+x^2)$ si ha $\dot{y} = 0$ o se $y = 0$ o se $y + 1 = 2/(1+3x^2)$. Nel primo caso ($y = 0$) si trova $1 = 2/(1+x^2)$, quindi $x = \pm 1$. Nel secondo caso ($y + 1 = 2/(1+3x^2)$) si trova

$$y + 1 = \frac{2}{1+3x^2} \qquad \Longrightarrow \qquad 2y = \frac{4}{1+3x^2} - 2 = \frac{2}{1+x^2} - 1,$$

che dà

$$3x^4 + 6x^2 - 1 = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad x^2 = \frac{1}{3}\left(-3 \pm \sqrt{12}\right) = -1 \pm \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Ovviamente solo la determinazione positiva è possibile, quindi

$$x^2 = \frac{2}{\sqrt{3}} - 1 \qquad \Longrightarrow \qquad y = \frac{\sqrt{3}-1}{2}.$$

In conclusione abbiamo i 6 punti d'equilibrio $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$, $(-1,0)$, (x_0,y_0) e $(-x_0,y_0)$, dove

$$x_0 = \sqrt{\frac{2}{\sqrt{3}} - 1}, \qquad y_0 = \frac{\sqrt{3}-1}{2}.$$

6.3. Stabilità dei punti d'equilibrio. Parte I. La matrice $A(x,y)$ del sistema linearizzato nell'intorno del punto d'equilibrio (x_0,y_0) è data da

$$A(x_0,y_0) = \begin{pmatrix} H_{xy}(x_0,y_0) & H_{yy}(x_0,y_0) \\ -H_{xx}(x_0,y_0) & -H_{xy}(x_0,y_0) \end{pmatrix},$$

dove

$$\begin{aligned}
H_{xx}(x_0,y_0) &:= \frac{\partial^2 H}{\partial x^2}(x_0,y_0) = 2y_0 - 1 + 3x_0^2\left(2y_0+1\right), \\
H_{xy}(x_0,y_0) &:= \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y}(x_0,y_0) = 2x_0\left(x_0^2+1\right), \\
H_{yy}(x_0,y_0) &:= \frac{\partial^2 H}{\partial y^2}(x_0,y_0) = -2y_0 + 1 - 3x_0^2\left(2y_0+1\right),
\end{aligned}$$

dove abbiamo usato che $H_{xy} = H_{yx}$. Si ottiene

$$A(0,0) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A(0,1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad A(\pm 1,0) = \begin{pmatrix} 2 & \pm 4 \\ 0 & -2 \end{pmatrix},$$

quindi in tutti e quattro i casi abbiamo un autovalore positivo e uno negativo. In particolare almeno uno è positivo, quindi possiamo concludere che i quattro punti sono punti d'equilibrio instabile.

6.4. Analisi qualitativa. I. Prima di studiare la stabilità degli altri due punti iniziamo a studiare le curve di livello

$$\Sigma_c = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : H(x,y) = c\right\},$$

iniziando dai valori che corrispondono ai punti d'equilibrio instabile trovati.

Si ha $H(0,0) = H(\pm 1, 0) = H(0,1) = 0$. Si vede subito che Σ_0 è data dall'unione delle due rette

$$\mathcal{C}_1 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0\right\}, \qquad \mathcal{C}_2 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\right\},$$

e della curva

$$\mathcal{C}_3 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = \frac{1-x^2}{1+x^2}\right\}.$$

La curva $\mathcal{C}_3$ si studia come segue. Poniamo $y = f(x) = (1-x^2)/(1+x^2)$. Si ha quindi

$$f(x) = \frac{1-x^2}{1+x^2} = \frac{2}{1+x^2} - 1,$$
$$f'(x) = -\frac{4x}{(1+x^2)^2}.$$

Quindi $f'(x) = 0$ per $x = 0$, $f'(x) > 0$ per $x < 0$ e $f'(x) < 0$ per $x > 0$. Infine

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = -1, \qquad f(0) = 1.$$

Cfr. la Figura 3.

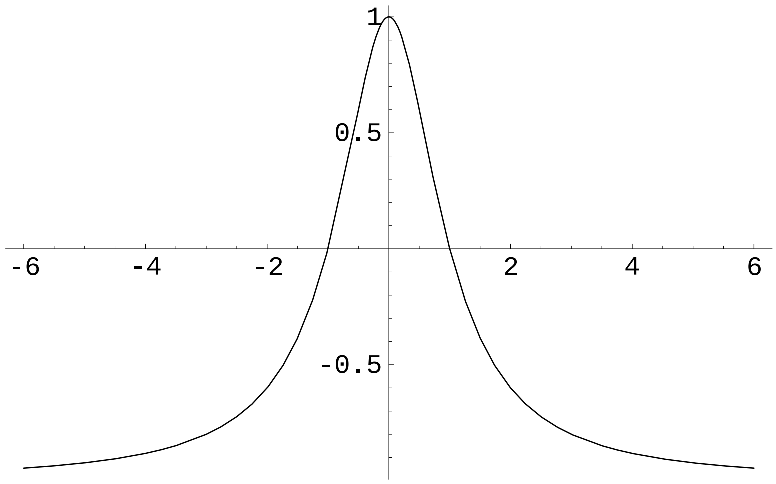

Figura 3. Grafico della funzione $f(x)$.

I versi di percorrenza si ottengono come segue. Per $x = 0$ si ha $\dot{x} = 0$ e $\dot{y} = y(1-y)$, quindi $\dot{y} > 0$ se e solo se $0 < y < 1$. Per $y = 0$ si ha $\dot{y} = 0$ e $\dot{x} = x(x^2 - 1)$ e quindi $\dot{x} > 0$ se e solo se $x > 1$ oppure $-1 < x < 0$.

I versi di percorrenza lungo $\mathcal{C}_3$ si possono ottenere usando la continuità della funzione $H(x,y)$ e la dipendenza continua dai dati iniziali.

6.3. Stabilità dei punti d'equilibrio. Parte II. Per studiare la stabilità dei punti d'equilibrio restanti cerchiamo di applicare il teorema di Ljapunov.

Consideriamo la regione aperta A definita da

$$\mathcal{A}_1 := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1, 0 < y < f(x)\right\}.$$

Sulla frontiera di $\mathcal{A}_1$ la funzione H si annulla, e all'interno c'è un solo punto stazionario, (x_0, y_0), dove la funzione H assume il valore

$$H(x_0, y_0) = \sqrt{\frac{2}{\sqrt{3}} - 1}\frac{\sqrt{3}-1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{3}} - 2\right) < 0,$$

Quindi, per continuità, la funzione H è sempre strettamente negativa all'interno di $\mathcal{A}_1$. Poiché per il teorema di Weierstrass la funzione H deve avere massimi e minimi nella chiusura di $\mathcal{A}_1$ possiamo concludere che il valore massimo è 0 ed è assunto sulla frontiera, mentre il valore minimo è $H(x_0, y_0)$ ed è assunto nel punto (x_0, y_0). In conclusione (x_0, y_0) è un punto di minimo (locale) per H. Possiamo quindi definire la funzione di Ljapunov

$$W(x,y) = H(x,y) - H(x_0,y_0),$$

in modo che, comunque preso un intorno $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}_1$ di (x_0, y_0), si abbia
(1) $W(x_0, y_0) = 0$ e $W(x,y) > 0$ per ogni $(x_0, y_0) \in \mathcal{B} \setminus \{(x_0, y_0)\}$,
(2) $\dot{W}(x,y) = \dot{H}(x,y) = 0$ per ogni $(x,y) \in \mathcal{B}$.
In conclusione, possiamo applicare il teorema di Ljapunov che, sotto tali ipotesi, implica la stabilità del punto (x_0, y_0). Analogamente, notando che $H(-x,y) = -H(x,y)$ abbiamo che $(-x_0, y_0)$ è un punto di massimo (locale) per H, e possiamo quindi applicare il teorema di Ljapunov prendendo

$$W(x,y) = -\left(H(x,y) - H(-x_0,y_0)\right)$$

come funzione di Ljapunov, e concludere che anche $(-x_0, y_0)$ è un punto d'equilibrio stabile.

6.4. Analisi qualitativa. II. Le altre curve di livello e i corrispondenti versi di percorrenza si ottengono in modo simile. In particolare nelle regioni $\mathcal{A}_1 \setminus \{(x_0, y_0)\}$ e $\mathcal{A}_2 \setminus \{(-x_0, y_0)\}$, dove

$$\mathcal{A}_2 := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 < x < 0, 0 < y < f(x)\right\},$$

si hanno orbite chiuse. Infatti abbiamo in entrambi i casi una regione aperta contenuta all'interno di una componente connessa di una curva di livello (Σ_0 nel nostro caso) e contenente un punto d'equilibrio stabile. Inoltre esiste una costante del moto regolare (C^∞) con punti stazionari isolati. Possiamo perciò applicare il teorema che afferma che, sotto tali condizioni, tutte le traiettorie con dati iniziali in una di tali regioni (diversi dal punto d'equilibrio) sono periodiche e descrivono orbite che contengono il punto d'equilibrio al loro interno. La situazione è rappresentata in Figura 4.

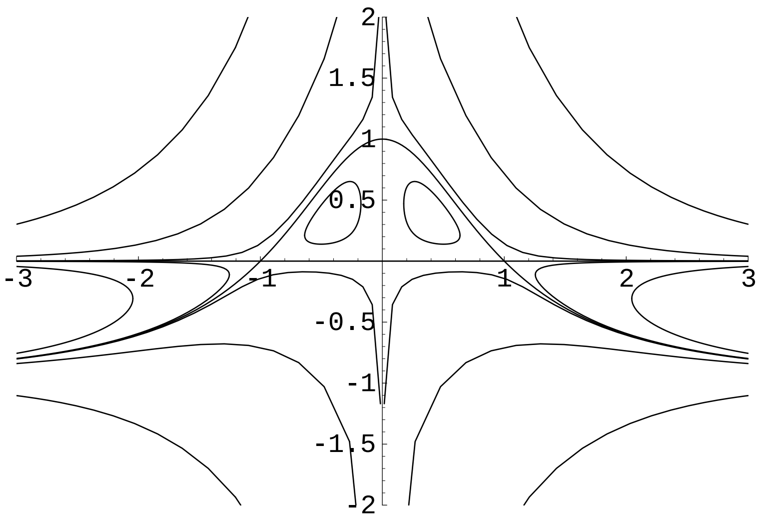

Figura 4. Analisi qualitativa del sistema.