Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2001/2002

FM1 - Equazioni differenziali e meccanica

Seconda prova d'esonero (28-05-02)

CORREZIONE

Esercizio.

(1) L'equazione del moto è

$$m\ddot{x} = \ddot{x} = -V'(x),$$

dove

$$V'(x) = \big(2x - x^2 + 1\big)\, e^{-x};$$

quindi

$$\ddot{x} = \big(x^2 - 2x - 1\big)\, e^{-x}.$$

Il sistema dinamico associato è

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -V'(x). \end{cases}$$

---

(2) Si ha

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} E(x,y) = y\,\dot{y} + V'(x)\,\dot{x} = \dot{x}\,(\dot{y} + V'(x)) = 0.$$

---

(3) I punti d'equilibrio devono essere della forma $(x_0, 0)$ dove $V'(x_0) = 0$. Risulta $V'(x) = 0$ per

$$x^2 - 2x - 1 = 0,$$

che ammette le radici reali

$$x = x_{\pm} = 1 \pm \sqrt{2}.$$

Si ha

$$\begin{aligned} V(x) &= \big(x^2 - 1\big)\, e^{-x}, \\ V'(x) &= \big(2x - x^2 + 1\big)\, e^{-x}, \\ V''(x) &= \big(x^2 - 4x + 1\big)\, e^{-x}. \end{aligned}$$

Si ha inoltre

$$V''(1-\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}\, e^{-1+\sqrt{2}} > 0,$$
$$V''(1+\sqrt{2}) = -2\sqrt{2}\, e^{-1-\sqrt{2}} < 0,$$

quindi $x = 1-\sqrt{2}$ è un punto di minimo, mentre $x = 1+\sqrt{2}$ è un punto di massimo.

In conclusione si hanno due punti d'equilibrio

$$P_1 = \left(1-\sqrt{2}, 0\right), \qquad P_2 = \left(1+\sqrt{2}, 0\right).$$

Il punto P_1 è un punto d'equilibrio stabile per il teorema di Dirichlet (che afferma che, per sistemi meccanici conservativi, se x_0 è un punto di minimo isolato per l'energia potenziale allora $(x_0, 0)$ costituisce un punto d'equilibrio stabile per il sistema dinamico associato).

Il punto P_2 è un punto d'equilibrio instabile, perché gli autovalori della matrice del sistema linearizzato

$$\begin{pmatrix} \dot{\xi} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -V''(1+\sqrt{2}) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ y \end{pmatrix}, \qquad \xi = x - (1+\sqrt{2}),$$

in un intorno di P_2 sono

$$\pm\sqrt{-V''(1+\sqrt{2})},$$

come è immediato verificare, e quindi uno dei due è positivo. Possiamo allora applicare il teorema che afferma che, dato un sistema dinamico, se almeno un autovalore della matrice del sistema dinamico linearizzato nell'intorno di un punto d'equilibrio è positivo, allora il punto è d'equilibrio instabile.

---

(4) La funzione $V(x)$ è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$, e si ha

$$\lim_{x\to-\infty} V(x) = \infty, \qquad \lim_{x\to\infty} V(x) = 0^+.$$

Inoltre la funzione ha un minimo assoluto in $x = x_- = 1-\sqrt{2} < 0$ e un massimo relativo in $x = x_+ = 1+\sqrt{2}$, ed è quindi decrescente per $x < x_-$ e per $x > x_+$, mentre è crescente per $x \in (x_-, x_+)$.

La concavità si ottiene studiando la derivata seconda. Si ha $V''(x) = 0$ in x soluzione di $x^2 - 4x + 1$, quindi per

$$x = 2 \pm \sqrt{3}.$$

Inoltre $V''(x) \to \infty$ per $x \to \infty$, quindi $V(x)$ è convessa per $x < 2-\sqrt{3}$ e per $x > 2+\sqrt{3}$, mentre è concava nell'intervallo $(2-\sqrt{3}, 2+\sqrt{3})$.

Si ha infine

$$V(1-\sqrt{2}) = 2\left(1-\sqrt{2}\right) e^{-1-\sqrt{2}} \approx -1.25, \qquad V(1-\sqrt{2}) = 2\left(1+\sqrt{2}\right) e^{-1-\sqrt{2}} \approx 0.43. \blacksquare$$

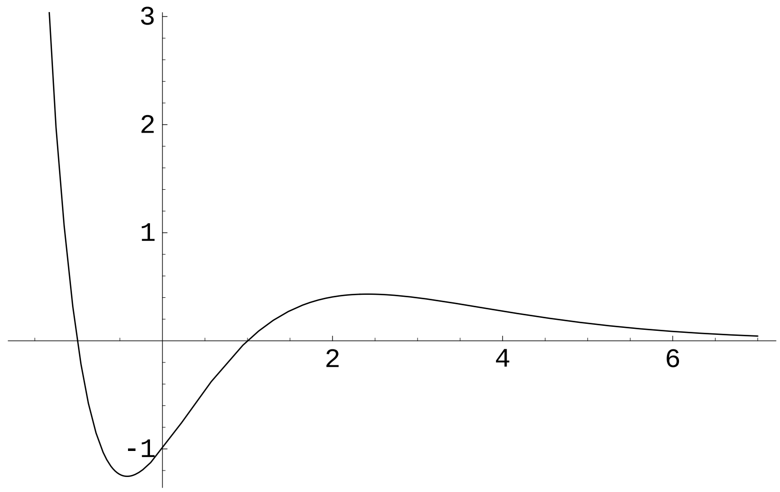

Figura 1. Grafico della funzione $V(x)$.

Il grafico di $V(x)$ è quindi come rappresentato in Figura 1.

---

(5) Le curve di livello

$$\Gamma_E = \Big\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ E(x,y) = E \Big\}$$

si possono ricavare dallo studio dell'energia potenziale $V(x)$.

Si possono avere curve di livello solo per valori di energia

$$E > \min_{x \in \mathbb{R}} V(x) = V(x_-) = V(1 - \sqrt{2}).$$

Per $E = V(x_-)$ si ha $\Gamma_0 = \{(x_-, 0)\}$.

Per $V(x_-) < E < V(x_+)$ si ha $\Gamma_E = \mathcal{C}_E$, dove $\mathcal{C}_E$ è una curva regolare che gode delle seguenti proprietà:

(1) la curva interseca l'asse x in due punti $x_1(E)$ e $x_2(E)$ tali che

$$V(x_j(E)) = E, \qquad j = 1, 2,$$

(2) la curva è simmetrica rispetto all'asse x,
(3) la curva è parametrizzata dall'equazione

$$y = y_\pm(x) = \pm\sqrt{2(E - V(x))},$$

dove $y_+(x)$ è crescente tra $x_1(E)$ e $1-\sqrt{2}$ e decrescente tra $1-\sqrt{2}$ e x_2,
(4) la tangente alla curva è verticale in corrispondenza dei due punti $x_1(E)$ e $x_2(E)$.

Per $E = V(x_+)$ la curva di livello è costituita da quattro orbite: il punto d'equilibrio P_2, due orbite illimitate, delle quali una (nel semipiano superiore) è asintotica a P_2 nel passato e all'infinito nel futuro e l'altra (nel semipiano inferiore) è asintotica a P_2 nel futuro e all'infinito nel passato, e un'orbita omoclina asintotica a P_2 sia nel passato sia nel futuro, che attraversa l'asse x in un punto $x = z_0$. In corrispindenza del punto d'equilibrio la curva di livello forma una X, poiché in un intorno di $x_+ = 1+\sqrt{2}$ si ha

$$\begin{aligned} y = \pm\sqrt{2(E - V(x))} &= \pm\sqrt{2\left(E - V(x_+) - V'(x_+)(x-x_+) - \frac{1}{2}V''(x_+)(x-x_+)^2 + O((x-x_+)^3)\right)} \\ &= \sqrt{-\frac{1}{2}V''(x_+)\,(x-x_+)^2 + O((x-x_+)^3)} = \sqrt{-\frac{1}{2}V''(x_+)}\,|x-x_+|\,\big(1 + +O(x-x_+)\big), \end{aligned}$$

poiché $E = V(x_+)$, $V'(x_+) = 0$ e $V''(x_+) < 0$.

Per $E > V(x_+)$ si ha $\Gamma_E = \mathcal{D}_E$, dove $\mathcal{D}_E$ è una curva aperta, che attraversa l'asse x in un solo punto $x < z_0$ (e ha ivi tangenza verticale)

La situazione è rappresentata in Figura 2.

I versi di percorrenza delle orbite sono tutti da sinistra a destra nel semipiano superiore e da destra a sinistra nel semipiano inferiore (poiché $\dot{x} = y$).

Quindi i dati iniziali che generano traiettorie periodiche sono della forma $(x(0), y(0))$ tali che
(1) $V(x_-) < E(x(0), y(0)) < V(x_+)$, e
(2) $x < x_+$.

---

(6) Si ha

$$E(0,\sqrt{2}) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{2}\right)^2 + V(0) = 1 - 1 = 0,$$

quindi

$$V(x_-) < E(0,\sqrt{2}) < V(x_+).$$

Perciò la traiettoria con dato iniziale $(0,\sqrt{2})$ è periodica.

---

(7) Si ha $V(x) = E = 0$ per $x = \pm 1$, quindi (con le notazioni introdotte sopra) si ha

$$x_1(0) = -1, \qquad x_2(0) = 1.$$

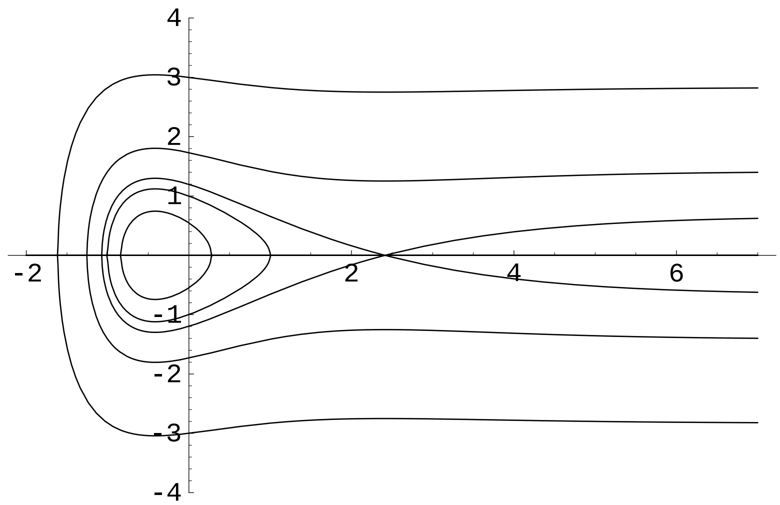

Figura 2. Curve di livello.

Quindi

$$T = 2\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2(1-x^2)e^{-x}}},$$

che esprime il periodo come integrale indefinito.

---

(8) Possiamo scrivere

$$2\,(E - V(x)) = 2\,(1-x)\,(x+1)\,e^{-x} \equiv \Phi(x)\,(1-x)\,(x+1)\,,$$

avendo definito

$$\Phi(x) = 2e^{-x}.$$

Si vede subito che

$$C_1 \equiv 2e^{-1} \le \Phi(x) \le 2e \equiv C_2 \qquad \forall x \in [-1,1],$$

ovvero

$$\sqrt{\frac{1}{2e}} \le \frac{1}{\sqrt{\Phi(x)}} \le \sqrt{\frac{e}{2}} \qquad \forall x \in [-1,1],$$

così che possiamo stimare

$$\sqrt{\frac{1}{2e}}\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} \leq \int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2(1-x^2)e^{-x}}} \leq \sqrt{\frac{e}{2}}\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}},$$

dove

$$\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(1-x)\,(x+1)}} = \pi.$$

In conclusione si ha

$$\pi\sqrt{\frac{2}{e}} \leq T \leq \pi\sqrt{2e},$$

che fornisce una stima (certamente non ottimale) del periodo.
