

Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2002/2003  
FM1 - Equazioni differenziali e meccanica

PRIMA PROVA D'ESONERO (16-04-03)

CORREZIONE

---

ESERCIZIO 2.

**2.1. Primo metodo.** La matrice  $A$  è nilpotente di ordine 2. Infatti  $A^2 = 0$ . Del resto questo si può ottenere anche ragionando nel modo seguente.

Gli autovalori di  $A$  sono le soluzioni dell'equazione

$$\det(A - \lambda \mathbb{1}) = (1 - \lambda)(-1 - \lambda) + 1 = \lambda^2 - 1 + 1 = \lambda^2 = 0,$$

quindi lo spettro  $\Sigma(A)$  di  $A$  è costituito da un unico autovalore  $\lambda = 0$ , con molteplicità 2. Poiché è sempre possibile scrivere  $A = S + N$ , con  $S$  semisemplice e  $N$  nilpotente tali che  $[S, N] = 0$ , nel nostro caso risulta  $S = 0$  (poiché  $\Sigma(A) = \{0\}$ ), e quindi  $A = N$  è nilpotente.

La soluzione del sistema è dato da

$$x(t) = e^{At}x(0) = (\mathbb{1} + At)x(0) = \begin{pmatrix} 1+t & t \\ -t & 1-t \end{pmatrix} x(0),$$

dove  $x(0) = (1, 1)$ . Quindi la soluzione è  $x(t) = (x_1(t), x_2(t))$ , con

$$\begin{cases} x_1(t) = 1 + 2t, \\ x_2(t) = 1 - 2t. \end{cases}$$

**2.2. Secondo metodo.** Alternativamente si poteva procedere come segue. Poiché  $\Sigma(A) = \{0\}$ , possiamo cercare direttamente la soluzione nella forma

$$x(t) = e^{0t}(a + bt) = a + bt,$$

che, introdotta in  $\dot{x} = Ax$ , dà

$$\begin{cases} b_1 = a_1 + b_1t + a_2 + b_2t, \\ b_2 = -a_1 - b_1t - a_2 - b_2t, \end{cases}$$

che equivale alle due equazioni linearmente indipendenti

$$\begin{cases} b_1 + b_2 = 0, \\ b_1 = a_1 + a_2, \end{cases}$$

da cui si ricava

$$a = (-\beta - \alpha, \alpha), \quad b = (-\beta, \beta),$$

dove  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  si determinano imponendo le condizioni iniziali:

$$x(0) = a = (a_1, a_2) = (1, 1).$$

Quindi si ha

$$\alpha = 1, \quad \beta = -2,$$

da cui si ottiene, per la soluzione, l'espressione

$$x(t) = (1 + 2t, 1 - 2t),$$

in accordo con il risultato precedente.

---

#### ESERCIZIO 4.

**4.1. Costante del moto.** Si ha

$$H(x, y) = xy(x^3 + y^3 - 1) = x^4y + xy^4 - xy,$$

quindi, derivando, si ottiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial x} &= 4x^3y + y^4 - y = y(4x^3 + y^3 - 1) = -\dot{y}, \\ \frac{\partial H}{\partial y} &= 4xy^3 + x^4 - x = x(4y^3 + x^3 - 1) = \dot{x}, \end{aligned}$$

così che si ha

$$\dot{H} = \frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial H}{\partial y} \dot{y} = -\dot{y}\dot{x} + \dot{y}\dot{x} = 0,$$

e quindi  $H$  è effettivamente una costante del moto.

**4.2. Punti d'equilibrio.** I punti d'equilibrio sono i punti  $(x, y)$  in cui si annulla il campo vettoriale.

Si ha  $\dot{x} = 0$  per  $x = 0$  oppure per

$$x^3 + 4y^3 - 1 = 0.$$

Se  $x = 0$  l'equazione  $\dot{y} = 0$  richiede  $y = 0$  oppure

$$4x^3 + y^3 - 1 = y^3 - 1 = 0,$$

da cui si ottiene  $y = 1$ .

Se invece  $x^3 + 4y^3 - 1 = 0$ , si ha  $\dot{y} = 0$  se  $y = 0$ , che richiede

$$x^3 + 4y^3 - 1 = x^3 - 1 = 0,$$

*i.e.*  $x = 1$ , oppure se

$$4x^3 + y^3 - 1 = 4(1 - 4y^3) + y^3 - 1 = 3 - 15y^3,$$

che richiede  $y = (1/5)^{1/3}$ . Il corrispondente valore di  $x$  è dato da

$$x^3 = 1 - 4y^3 = 1 - \frac{4}{5} = \frac{1}{5},$$

da cui si ottiene  $x = (1/5)^{1/3}$ .

In conclusione i punti d'equilibrio sono i seguenti quattro:

$$P_0 = (0, 0), \quad P_1 = (1, 0), \quad P_2 = (0, 1), \quad P_3 = \left( \left( \frac{1}{5} \right)^{1/3}, \left( \frac{1}{5} \right)^{1/3} \right).$$

**4.3. Stabilità dei punti d'equilibrio.** Il sistema linearizzato in un intorno di un punto d'equilibrio  $(x, y)$  ha matrice

$$A(x, y) = \begin{pmatrix} 4x^3 + 4y^3 - 1 & 12xy^2 \\ -12x^2y & -4y^3 - 4x^3 + 1 \end{pmatrix},$$

così che si ha

$$A(0, 0) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A(1, 0) = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix},$$

$$A(0, 1) = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix},$$

e quindi i due punti d'equilibrio  $P_0$ ,  $P_1$  e  $P_2$  sono punti d'equilibrio instabile, dal momento che uno degli autovalori della matrice del sistema linearizzato associato ha parte reale strettamente positiva.

Per il punto  $P_3$  otteniamo

$$A(x, y) = \begin{pmatrix} -3/5 & 12/5 \\ -12/5 & +3/5 \end{pmatrix},$$

e quindi gli autovalori sono le soluzioni dell'equazione

$$\lambda^2 - \frac{9}{25} + \frac{144}{25} = \lambda^2 + \frac{135}{25},$$

e quindi sono immaginari puri: non possiamo perciò concludere.

Definiamo

$$\Gamma_E = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : H(x, y) = E \right\}.$$

Per  $E = 0$  si ottiene

$$\Gamma_0 = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2 \cup \mathcal{C}_3,$$

dove  $\mathcal{C}_1$  è la retta  $x = 0$ ,  $\mathcal{C}_2$  è la retta  $y = 0$  e  $\mathcal{C}_3$  è la curva d'equazione

$$y = f(x) = (1 - x^3)^{1/3}.$$

Il grafico di tale curva si studia facilmente. Innanzitutto si ha

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} = -\mp\infty;$$

inoltre

$$f'(x) = \frac{df}{dx}(x) = -x^2 (1 - x^3)^{-2/3},$$

e quindi  $f'(x)$  è continua e non positiva per ogni  $x \neq 1$ , mentre

$$\lim_{x \rightarrow 1^\pm} f'(x) = -\infty,$$

così che possiamo concludere che la funzione  $f(x)$  è definita in  $\mathbb{R}$  e decrescente. La tangente è verticale in  $x = 1$ . Inoltre  $f'(x) < 0$  per ogni  $x \neq 0$ , e  $f'(0) = 0$ . Quindi  $x = 0$  è l'unico punto stazionario per  $f(x)$  e sarà un punto di flesso orizzontale, mentre  $x = 1$  sarà un punto di flesso verticale.

Questo è confermato anche dallo studio della derivata seconda. Si ha infatti

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{d^2f}{dx^2}(x) = -2x (1 - x^3)^{-2/3} - 2x^4 (1 - x^3)^{-5/3} \\ &= -2x (1 - x^3)^{-5/3}, \end{aligned}$$

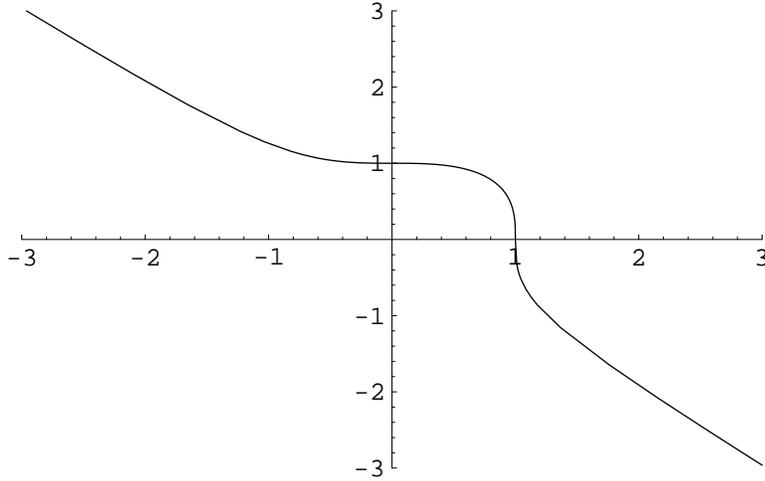
e quindi  $f''(x) > 0$  per  $x < 0$  e per  $x > 1$ , mentre  $f''(x) < 0$  per  $x \in (0, 1)$ : quindi la funzione  $f(x)$  è convessa per  $x < 0$  e per  $x > 1$ , mentre è concava nell'intervallo  $(0, 1)$ . Il grafico della funzione  $f(x)$  è rappresentato in Figura 1.

Se consideriamo allora la restrizione di  $H(x, y)$  alla regione chiusa  $\bar{\mathcal{A}}$ , dove  $\mathcal{A}$  è l'insieme aperto

$$\mathcal{A} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1, 0 < y < f(x) \right\},$$

abbiamo che sulla frontiera  $\partial\mathcal{A}$  la funzione  $H(x, y)$  vale 0, mentre in  $P_3$  (unico punto stazionario interno) si ha

$$H(P_3) = \left(\frac{1}{5}\right)^{2/3} \left(-\frac{3}{5}\right) < 0,$$



**Figura 2.** Grafico della funzione  $f(x)$ .

così che possiamo concludere che il punto  $P_3$  è un punto di minimo per  $H(x, y)$ .

Possiamo allora definire la funzione di Lyapunov

$$W(x, y) = H(x, y) - H(P_3),$$

e fissare un intorno  $B$  del punto  $P_3$  tale che

- (1)  $W(P_3) = 0$  e  $W(x, y) > 0 \forall (x, y) \in B \setminus \{P_3\}$ ;
- (2)  $\dot{W}(x, y) = \dot{H}(x, y) = 0$ .

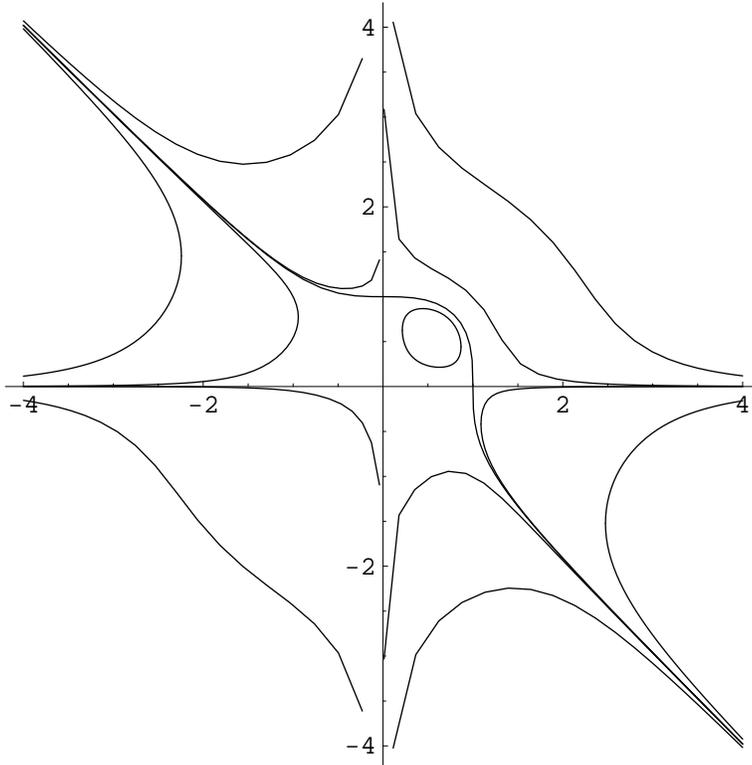
Sono quindi soddisfatte le condizioni sotto cui è possibile applicare il teorema di Lyapunov, per concludere che il punto  $P_3$  è un punto d'equilibrio stabile.

**4.4. Analisi qualitativa delle traiettorie.** Per le curve di livello della funzione  $H(x, y)$  si ha la situazione rappresentata in Figura 2.

La curva di livello  $\Gamma_0$  è costituita da 12 orbite: i 3 punti d'equilibrio  $P_0$ ,  $P_1$  e  $P_2$ , e i 9 archi di curva in cui le curve  $\mathcal{C}_1$ ,  $\mathcal{C}_2$  e  $\mathcal{C}_3$  sono divise dai punti d'equilibrio.

Per determinare il verso di percorrenza, lungo la curva  $\mathcal{C}_1$ , definita da  $x = 0$ , si deve tener conto che lungo tale retta si ha  $\dot{x} = 0$  e

$$\dot{y} = -y(y^3 - 1) \begin{cases} > 0, & \text{se } 0 < y < 1, \\ < 0, & \text{se } y > 1 \text{ oppure } y < 0. \end{cases}$$



**Figura 2.** Curve di livello della funzione  $H(x, y)$ .

Lungo la curva  $\mathcal{C}_2$  si ha  $\dot{y} = 0$  e

$$\dot{x} = x(x^3 - 1) \begin{cases} > 0, & \text{se } x > 1 \text{ oppure } x < 0, \\ < 0, & \text{se } 0 < x < 1. \end{cases}$$

Lungo la curva  $\mathcal{C}_3$ , dove  $y^3 = 1 - x^3$ , si ha

$$\dot{x} = 3x(1 - x^3) \begin{cases} > 0, & \text{se } 0 < x < 1, \\ < 0, & \text{se } x > 1 \text{ oppure } x < 0, \end{cases}$$

e il segno di  $\dot{y}$  si ricava per consistenza.

Le altre curve di livello e i versi di percorrenza delle orbite corrispondenti si ricavano per continuità.

Nella regione aperta  $\mathcal{A} \setminus \{P_3\}$  le traiettorie sono periodiche, e si svolgono su orbite chiuse che contengono il punto  $P_3$  al loro interno. Infatti la regione  $\mathcal{A}$  è racchiusa da una componente connessa della curva di livello  $\mathcal{A}$  e contiene un punto d'equilibrio stabile al suo interno: possiamo quindi applicare un teorema che garantisce che, sotto tali condizioni, tutti i dati iniziali in  $\mathcal{A} \setminus \{P_3\}$  generano traiettorie periodiche.