

FM1 - Equazioni differenziali e meccanica

SECONDA PROVA D'ESONERO (16-06-03)

ESERCIZIO 1. Discutere brevemente il problema dei due corpi.

ESERCIZIO 2. Si studi il sistema meccanico unidimensionale che descrive un punto materiale di massa $m = 1$, soggetto alla forza di energia potenziale

$$V(x) = x^4 + 8x^3 + 2ax^2,$$

con $a \in \mathbb{R}$. Per $a = 5$ si svolgano i seguenti punti.

(2.1) Studio del grafico dell'energia potenziale.

(2.2) Determinazione dei punti d'equilibrio per il sistema dinamico associato.

(2.3) Discussione della loro stabilità.

(2.4) Analisi qualitativa del moto nel piano (x, \dot{x}) .

[(2.5) Al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$ si discuta brevemente come cambia lo scenario.]

ESERCIZIO 3. Definire l'operatore d'inerzia e discuterne le proprietà.

ESERCIZIO 4. Dato un sistema di riferimento $\kappa = Oxyz$ (sistema assoluto), si consideri un sistema di riferimento mobile $K = O'\xi\eta\zeta$ (sistema relativo), la cui origine O' si muove in senso antiorario lungo la circonferenza \mathcal{C} di raggio $r = 1$ e centro nell'origine O con velocità angolare costante ω . L'asse ζ si mantiene parallelo all'asse z , mentre l'asse ξ si mantiene sempre ortogonale alla circonferenza \mathcal{C} (i.e. in direzione radiale) diretto verso l'esterno; il vettore $\mathbf{r}(t)$ che individua O' nel sistema fisso, all'istante iniziale $t = 0$, ha coordinate $\mathbf{r}(0) = (1, 0, 0)$.

Un punto materiale P di massa $m = 1$ si muove nel sistema K lungo una circonferenza di raggio $a \in (0, 1)$, con velocità angolare costante ω' ; all'istante iniziale le coordinate del punto P nel sistema mobile sono $\mathbf{Q} = (a, 0, 0)$.

(4.1) Scrivere la trasformazione rigida $D: K \rightarrow \kappa$ come composizione di una traslazione C con una rotazione B , i.e. $D = C \circ B$, e determinare C e B .

(4.2) Determinare la velocità assoluta \mathbf{v} .

(4.3) Determinare la velocità relativa \mathbf{v}' .

(4.4) Determinare la componente traslatoria della velocità di trascinamento \mathbf{v}_0 .

(4.5) Determinare la componente rotatoria della velocità di trascinamento \mathbf{v}_T .

[(4.6) Determinare le condizioni su ω e ω' perché il moto complessivo sia periodico (nel sistema fisso κ).]