Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2002/2003

FM1 - Equazioni differenziali e meccanica

SECONDA PROVA D'ESONERO (16-06-03)

CORREZIONE

ESERCIZIO 2.

2.1. Grafico dell'energia potenziale. Si ha

$$
\begin{aligned}
V(x) &= x^4 + 8x^3 + 10x^2, \\
V'(x) &= 4x^3 + 24x^2 + 20x = 4x\left(x^2 + 6x + 5\right), \\
V''(x) &= 12x^2 + 48x + 20 = 4\left(3x^2 + 12x + 5\right),
\end{aligned}
$$

Si ha $\lim_{x\to\infty} V(x) = \infty$. I punti stazionari di $V(x)$ sono gli zeri della funzione $V'(x)$: quindi sono $x = 0$ e $x = x_{\pm}$, dove

$$
x_{\pm} = -3 \pm \sqrt{9-5} = -3 \pm 2;
$$

in conclusione i punti stazionari sono $x_- < x_+ < 0$, con $x_- = -5$ e $x_+ = -1$. Inoltre si ha

$$
\begin{aligned}
V''(x_-) &= 4\,(75 - 60 + 5) = 80 > 0, \\
V''(x_+) &= 4\,(3 - 12 + 5) = -16 < 0, \\
V''(0) &= 20 > 0,
\end{aligned}
$$

Quindi il punto stazionario intermedio $x = x_+$ è un punto di massimo, mentre x_- e 0 sono punti di minimo.

Studiando la dearivata seconda $V''(x)$ si trova $V''(x) = 0$ per $x = z_{\pm}$, dove

$$
z_{\pm} = -2 \pm \sqrt{\frac{7}{3}},
$$

che sono quindi punti di flesso per $V(x)$: quindi $V(x)$ è convessa per $x < z_-$ e per $x > z_+$ e concava per $x \in (z_-, z_+)$.

Il grafico della funzione $V(x)$ è quindi come rappresentato in Figura 1.

2.2. Punti d'equilibrio. I punti d'equilibrio, per il sistema dinamico associato

$$
\begin{cases}
\dot{x} = y, \\
\dot{y} = -V'(x),
\end{cases}
$$

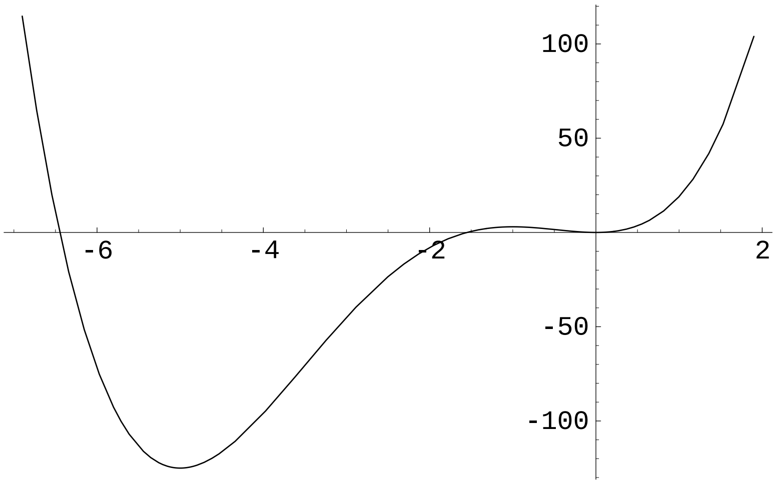

Figura 1. Grafico della funzione $V(x)$ per $a = 5$.

sono della forma $(x, y) = (x_0, 0)$ dove $V'(x_0) = 0$.

Abbiamo quindi tre punti d'equilibrio: $P_1 = (x_-, 0)$, $P_2 = (x_+, 0)$ e $P_3 = (0, 0)$.

2.3. Stabilità dei punti d'equilibrio. Per il teorema di Dirichlet i punti x_- e 0 sono punti d'equilibrio stabile, dal momento che sono punti di minimo isolati per l'energia potenziale.

Il punto x_+ è invece un punto d'equilibrio instabile. Infatti, ponendo $z = (x, y)$, il sistema dinamico linearizzato in un intorno del punto d'equlibrio $(x_+, 0)$ è della forma $\dot{z} = Az$, dove la matrice A è data da

$$A = A(x_+, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -V''(x_+) & 0 \end{pmatrix},$$

e quindi i corrispondenti autovalori sono dati da

$$\lambda_\pm = \pm\sqrt{-V''(x_+)},$$

dove $V''(x_+) < 0$. Quindi uno dei due autovalori è strettamente positivo, e possiamo concludere che il punto d'equlibrio in questione è instabile.

2.4. Analisi qualitativa. Le orbite si ricavano immediatamente dallo studio dell'energia potenziale, graficando al variare del valore dell'energia E la funzione

$$y = \pm\sqrt{2(E - V(x))}.$$

Si ottiene allora lo scenario rappresentato in Figura 2, dove le curve di livello

$$\Gamma_E = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ \frac{1}{2}y^2 + V(x) = E \right\}$$

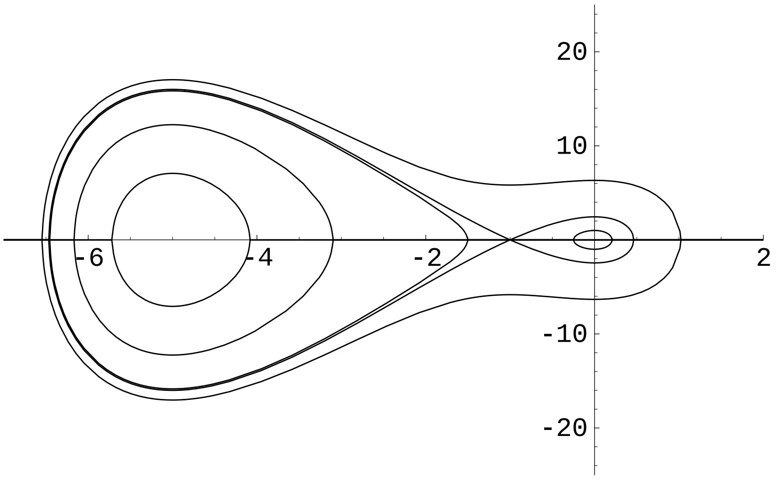

Figura 2. Grafico della funzione $V(x)$ per $a = 5$.

corrispondenti ai valori $E = -100, -50, -0.5, 3, 20$ sono state esplicitamente considerate.

Per $E < V(x_-)$ non si hanno curve di livello. Per $E = V(x_-)$ si ha $\Gamma_E = \{P_1\}$. Per $E \in (V(x_-), 0)$ la curva di livello Γ_E contiene un'unica orbita chiusa che gira intorno al punto P_1. Per $E = 0$ la curva di livello Γ_E contiene un'orbita chiusa analoga alle precedenti e, in più, il punto d'equilibrio P_3. Per $E \in (0, V(x_+)$ la curva di livello Γ_E contiene due curve chiuse disgiunte, una intorno al punto P_1 e una intorno al punto P_3. Per $E = V(x_+)$ la curva di livello Γ_E contiene il punto d'equilibrio instabile $P_2 = (x_+, 0)$ e due archi di curva percorsi da traiettorie asintotiche a P_2 per $t \to \pm\infty$ (traiettorie omocline): diremo in tal caso che Γ_E è una separatrice. La tangenza della curva in $x = x_+$ è obliqua poiché $V''(x_+) < 0$. Per $E > V(x_+)$ la curva di livello Γ_E contiene un'unica curva chiusa. I versi di percorenza sono sempre da sinistra a destra nel semipinao superiore e da destra a sinistra nel semipiano inferiore poiché $\dot{x} = y$.

2.5. Studi al variare del parametro. Per $a \in \mathbb{R}$ si ha

$$
\begin{aligned}
V(x) &= x^4 + 8x^3 + 2ax^2, \\
V'(x) &= 4x^3 + 24x^2 + 4ax = 4x\left(x^2 + 6x + a\right), \\
V''(x) &= 12x^2 + 48x + 20 = 4\left(3x^2 + 12x + a\right),
\end{aligned}
$$

Si ha $\lim_{x\to\infty} V(x) = \infty$. I punti stazionari di $V(x)$ sono gli zeri della funzione $V'(x)$: quindi sono $x = 0$ e $x = x_\pm$, dove

$$x_\pm = -3 \pm \sqrt{9 - a}.$$

bisogna quindi distinguere i casi $a > 9$, $a = 9$ e $a < 9$.

Se $a > 9$ le radici $x_\pm$ diventano immaginarie, quindi l'unico punto stazionario resta $x = 0$, che sarà ovviamente un punto di minimo. Studiando la derivata seconda si trova $V''(x) = 0$ per $x = z_\pm$, dove

$$z_\pm = -2 \pm \sqrt{\frac{12-a}{3}},$$

così che (tenendo conto che $V''(x) \to \infty$ per $x \to \pm\infty$) si ha $V''(x) > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ se $a > 12$ e $V''(x) > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$ se $a = 12$, mentre la funzione $V(x)$ è concava nell'intervallo (z_-, z_+) e convessa all'esterno se $a < 12$.

Il grafico di $V(x)$ è raffigurato in Figura 3 (per $9 < a < 12$) e in Figura 4 (per $a > 12$).

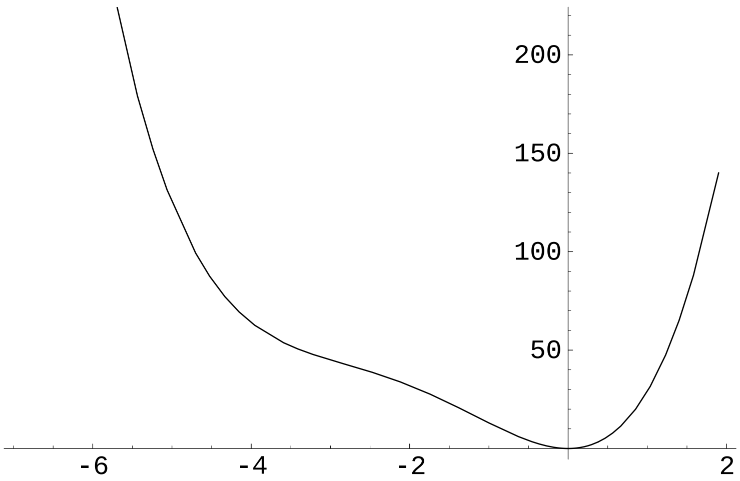

Figura 3. Grafico della funzione $V(x)$ per $12 > a > 9$.

Se $a = 9$ si ha un'unica radice $x = -3$ oltre a $x = 0$. Poiché $V''(0) = 20 > 0$ e $V''(-3) = 0$, concludiamo che $x = 0$ è un punto di minimo, mentre $x = -3$ è un punto di flesso orizzontale. Il grafico di $V(x)$ è raffigurato in Figura 5.

Se $a < 9$ abbiamo altre due radici reali oltre a $x = 0$. Si noti che x_- è sempre negativa, mentre x_+ è negativa per $a > 0$ e positiva per $a < 0$.

Quindi, per $a < 9$, distinguiamo i casi $a > 0$, $a = 0$ e $a < 9$. Se $0 < a < 9$ si ha $V''(0) = 4a > 0$, mentre $V''(x_-) > 0$ e $V''(x_+) < 0$, con $x_- < x_+ < 0$. Qualitativamente la situazione è come descritta al punto (1). L'unica differenza può essere sul valore di

$$\begin{aligned} V(x_-) &= \left(9 + (9-a) - 3\sqrt{9-a}\right)\left(9 + (9-a) - 3\sqrt{9-a} - 24 + \sqrt{9-a} + 2a\right) \\ &= \left(18 - a - \sqrt{9-a}\right)\left(-6 + a - 2\sqrt{9-a}\right), \end{aligned}$$

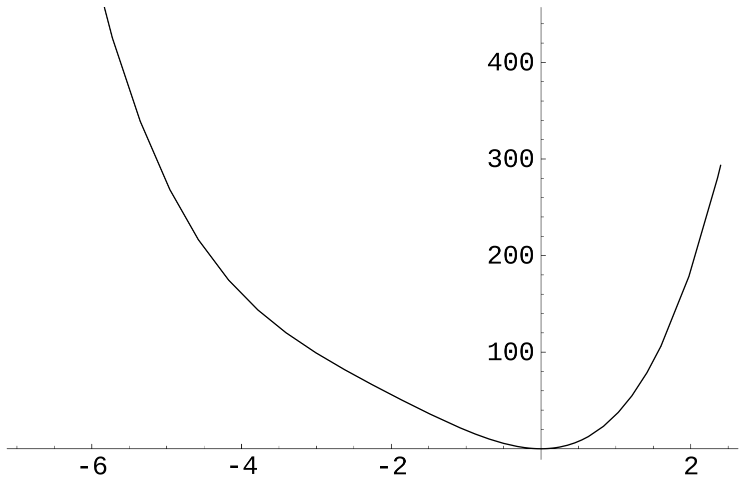

Figura 4. Grafico della funzione $V(x)$ per $a > 12$.

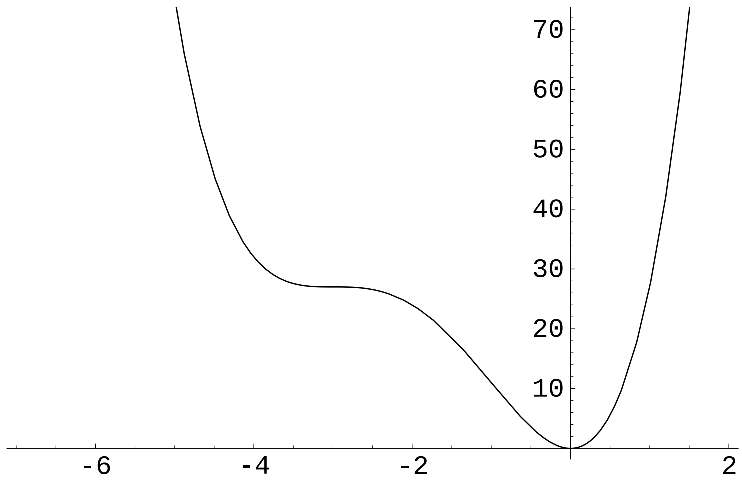

Figura 5. Grafico della funzione $V(x)$ per $a = 9$.

che può essere negativo o nullo o positivo: se è negativo il grafico di $V(x)$ è della forma di Figura 1, mentre se è positivo il grafico è della forma di Figura 6.

Se $a = 0$ la radice x_+ coincide con 0, e si ha $V''(0) = 0$, mentre $V''(x_-) < 0$. Quindi $x = 0$ è un punto di flesso orizzontale, mentre x_- è un punto di minimo: cfr. Figura 7.

Infine se $a < 0$, si ha il grafico rappresentato in Figura 8.

Il punto $x = 0$ è un punto di massimo, mentre $x_\pm$ sono due punti di minimo (anche se si vede con difficoltà nella figura risulta $V(x_\pm) < 0$). Un ingrandimento del grafico

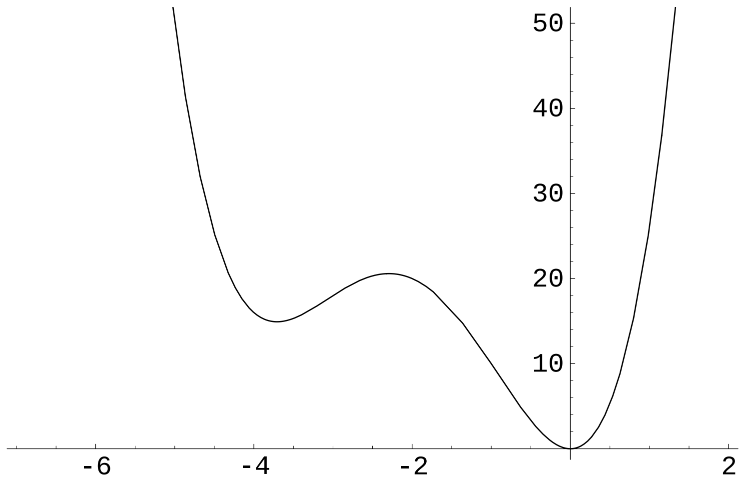

Figura 6. Grafico della funzione $V(x)$ per $a = 8.5$.

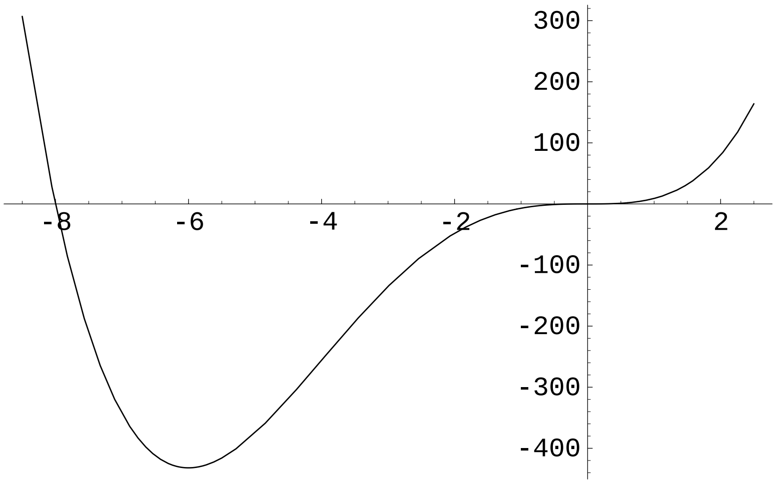

Figura 7. Grafico della funzione $V(x)$ per $a = 0$.

nell'intervallo $[-0.6, 1.6]$ è raffigurato in Figura 9.

Le orbite nel piano $(x, \dot{x})$ si possono dedurre dal grafico dell'energia potenziale ragionando come nel caso precedentemente trattato (punto (2.4)).

ESERCIZIO 4.

4.1. Trasformazione rigida. La traslazione C è definita da $C\colon \mathbf{q} \to \mathbf{q} + \mathbf{r}$, dove

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = (\cos\omega t, \sin\omega t, 0).$$

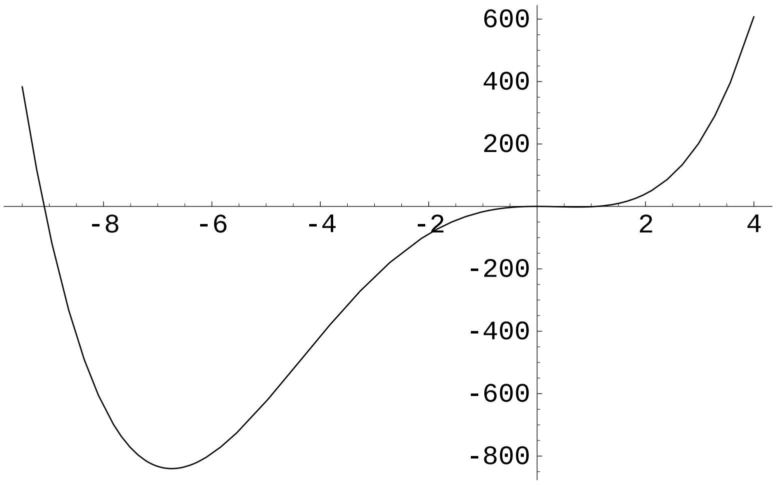

Figura 8. Grafico della funzione $V(x)$ per $a < 0$.

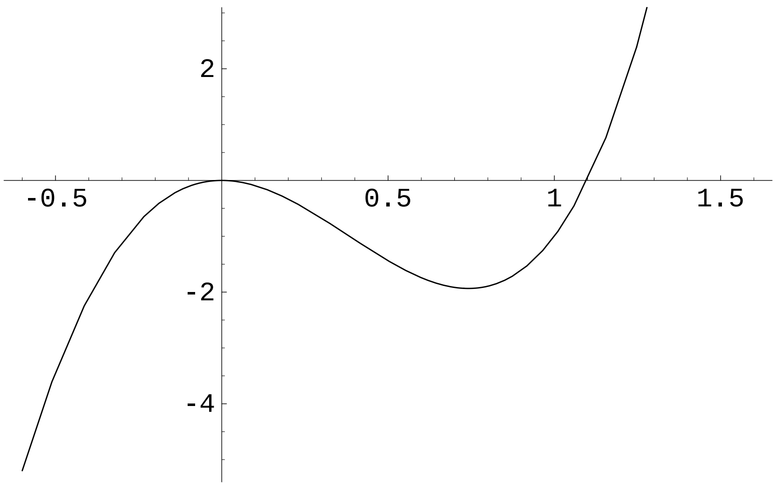

Figura 9. Ingrandimendo del grafico della funzione $V(x)$ per $a < 0$ nell'intervallo $[-0.6, 1.6]$.

mentre la rotazione B è definita da

$$B = B^{(3)}(\omega t) = \begin{pmatrix} \cos\omega t & -\sin\omega t & 0 \\ \sin\omega t & \cos\omega t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Quindi la legge di trasformazione delle coordinate è data da

$$\mathbf{q} = B\mathbf{Q} + \mathbf{r}.$$

Nel sistema mobile risulta

$$\mathbf{Q} = (\xi, \eta, \zeta) = (a\cos\omega' t, a\sin\omega' t, 0),$$

quindi abbiamo

$$\begin{aligned}
\mathbf{q} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos\omega t & -\sin\omega t & 0 \\ \sin\omega t & \cos\omega t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a\cos\omega' t \\ a\sin\omega' t \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos\omega t \\ \sin\omega t \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a(\cos\omega t\cos\omega' t - \sin\omega t\sin\omega' t) + \cos\omega t \\ a(\sin\omega t\cos\omega' t + \cos\omega t\sin\omega' t) + \sin\omega t \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a\cos((\omega+\omega')t) + \cos\omega t \\ a\sin((\omega+\omega')t) + \sin\omega t \\ 0 \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

dove abbiamo tenuto conto delle relazioni

$$\begin{aligned}
\cos x\cos y \pm \sin x\sin y &= \cos(x \mp y), \\
\sin x\cos y \pm \cos x\sin y &= \cos(x \pm y).
\end{aligned}$$

4.2. Velocità assoluta. Si ha

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{q}} = (-a(\omega+\omega')\sin((\omega+\omega')t) - \omega\sin\omega t, a(\omega+\omega')\cos((\omega+\omega')t) + \omega\cos\omega t, 0).$$

4.3. Velocità relativa. Si ha

$$\dot{\mathbf{Q}} = (-a\omega'\sin\omega' t, a\omega'\cos\omega' t, 0),$$

e quindi

$$\mathbf{v}' = B\dot{\mathbf{Q}} = (-a\omega'\sin((\omega+\omega')t), a\omega'\cos((\omega+\omega')t), 0).$$

4.4. Componente traslatoria della velocità di trascimento. Si ha

$$\mathbf{v}_0 = \dot{\mathbf{r}} = (-\omega\sin\omega t, \omega\cos\omega t, 0).$$

4.5. Componente rotatoria della velocità di trascimento. Si ha

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_T = [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{q} - \mathbf{r}] &= \det\begin{pmatrix} \hat{\xi} & \hat{\eta} & \hat{\zeta} \\ 0 & 0 & \omega \\ a\cos((\omega+\omega')t) & a\sin((\omega+\omega')t) & 0 \end{pmatrix} \\
&= (-a\omega\sin((\omega+\omega')t), a\omega\cos((\omega+\omega')t), 0).
\end{aligned}$$

4.6. Periodicità del moto. Per $t = 0$ si ha

$$\mathbf{q}(0) = (1 + a, 0, 0),$$

quindi il moto è periodico se esiste $T > 0$ tale che

$$\mathbf{q}(T) = (1 + a, 0, 0).$$

Data l'espressione delle funzione $\mathbf{q}(t)$ questo richiede che si abbia

$$a \cos((\omega + \omega')T) + \cos \omega T = 1 + a, \qquad a \sin((\omega + \omega')T) + \sin \omega T = 0,$$

ovvero $(\omega + \omega')T = 2\pi M$ e $\omega T = 2\pi N$, per qualche $M, N \in \mathbb{N}$. Questo è possibile se e solo se $(\omega + \omega')/\omega = M/N$, *i.e.* se e solo se

$$\frac{\omega + \omega'}{\omega} = 1 + \frac{\omega'}{\omega} \in \mathbb{Q},$$

e quindi la condizione sullle frequenze ω, ω' è che il loro rapporto ω/ω' sia un numero razionale.