

ESERCIZIO 1. [6] Discutere qualitativamente il sistema lineare planare $\dot{x} = Ax$ nel caso in cui lo spettro dell'operatore lineare A consista di due autovalori λ, μ tali che $0 < \lambda < \mu$.

ESERCIZIO 2. [6] Enunciare e dimostrare il lemma di Gronwall.

ESERCIZIO 3. [6] Si consideri l'equazione dell'oscillatore armonico con attrito $\ddot{x} + \alpha\dot{x} + kx = 0$, dove $\alpha > 0$ e $k > 0$ sono due costanti.

(3.1) Dimostrare che l'origine è un punto d'equilibrio asintoticamente stabile.

(3.2) Enunciare il teorema di Barbašin-Krasovskij e applicarlo per stimare il bacino d'attrazione dell'origine.

ESERCIZIO 4. [12] Sia dato il sistema dinamico planare

$$\begin{cases} \dot{x} = x(1 + \alpha x^2), \\ \dot{y} = -y(1 + 3\alpha x^2), \end{cases}$$

dove $\alpha \in \mathbb{R}$.

(4.1) Si trovi una costante del moto per il sistema.

(4.2) Si determinino i punti d'equilibrio del sistema al variare di α .

(4.3) Se ne discuta la stabilità al variare di α .

(4.4) Si studino qualitativamente le traiettorie del sistema al variare di α . In particolare si mostri che non esistono traiettorie periodiche per alcun valore di α .

ESERCIZIO 5. [6] Si dimostri l'unicità della soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

dove $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ è una funzione di classe C^1 .

ESERCIZIO 6. [6] Sia $\dot{x} = -\nabla V(x)$ un sistema gradiente, con $V: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^2 .

(6.1) Dimostrare che se x_0 è un punto di minimo isolato per V allora x_0 è un punto d'equilibrio asintoticamente stabile.

(6.2) Se $n = 2$ e $V(x_1, x_2) = x_1^4 + x_2^2$ dimostrare che l'origine è l'unico punto d'equilibrio, che è un punto d'equilibrio asintoticamente stabile e che il suo bacino d'attrazione è tutto il piano.