Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2005/2006

FM1 - Equazioni differenziali e meccanica

Prima prova d'esonero (03-04-2006)

Esercizio 1. [6] Discutere qualitativamente il sistema lineare planare $\dot{x} = Ax$ nel caso in cui lo spettro dell'operatore lineare A consista di due autovalori λ, μ tali che $0 < \lambda < \mu$.

Esercizio 2. [6] Enunciare e dimostrare il lemma di Gronwall.

Esercizio 3. [6] Si consideri l'equazione dell'oscillatore armonico con attrito $\ddot{x} + \alpha\dot{x} + kx = 0$, dove $\alpha > 0$ e $k > 0$ sono due costanti.
(3.1) Dimostrare che l'origine è un punto d'equilibrio asintoticamente stabile.
(3.2) Enunciare il teorema di Barbašin-Krasovskij e applicarlo per stimare il bacino d'attrazione dell'origine.

Esercizio 4. [12] Sia dato il sistema dinamico planare

$$\begin{cases} \dot{x} = x\left(1 + \alpha x^2\right), \\ \dot{y} = -y\left(1 + 3\alpha x^2\right), \end{cases}$$

dove $\alpha \in \mathbb{R}$.
(4.1) Si trovi una costante del moto per il sistema.
(4.2) Si determinino i punti d'equilibrio del sistema al variare di α.
(4.3) Se ne discuta la stabilità al variare di α.
(4.4) Si studino qualitativamente la traiettorie del sistema al variare di α. In particolare si mostri che non esistono traiettorie periodiche per alcun valore di α.

Esercizio 5. [6] Si dimostri l'unicità della soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

dove $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è una funzione di classe C^1.

Esercizio 6. [6] Sia $\dot{x} = -\nabla V(x)$ un sistema gradiente, con $V\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ di classe C^2.
(6.1) Dimostrare che se x_0 è un punto di minimo isolato per V allora x_0 è un punto d'equilibrio asintoticamente stabile.
(6.2) Se $n = 2$ e $V(x_1, x_2) = x_1^4 + x_2^2$ dimostrare che l'origine è l'unico punto d'equilibrio, che è un punto d'equilibrio asintoticamente stabile e che il suo bacino d'attrazione è tutto il piano.