

Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2005/2006
FM1 - Equazioni differenziali e meccanica

PRIMA PROVA D'ESONERO (03-04-2006)

CORREZIONE

ESERCIZIO 1. Cfr. Cap. 2, §6, paragrafo 6.4.

ESERCIZIO 2. Cfr. Cap. 3, §11, paragrafi 11.2 e 11.4.

ESERCIZIO 3.

3.1. Stabilità asintotica dell'origine. Possiamo riscrivere l'equazione nella forma

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -kx - \alpha y, \end{cases}$$

quindi l'origine $(0, 0)$ è un punto d'equilibrio.

La matrice del sistema linearizzato in un intorno dell'origine è

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -k & -\alpha \end{pmatrix},$$

così che l'equazione caratteristica è

$$\det(A - \lambda \mathbf{1}) = \lambda^2 + \alpha\lambda + k = 0 \quad \implies \quad \lambda = \frac{1}{2} \left(-\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 4k} \right).$$

Poiché $|\alpha^2 - 4k| < \alpha^2$ entrambi gli autovalori sono strettamente negativi, quindi $(0, 0)$ è un punto d'equilibrio asintoticamente stabile.

3.2. Stima del bacino d'attrazione dell'origine. L'enunciato del teorema di Barbašin-Krasokvskij è il seguente.

Teorema. Sia x_0 un punto d'equilibrio per il sistema $\dot{x} = f(x)$, con $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ è una funzione di classe C^1 . Supponiamo che esista una funzione $W: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definita in un intorno $B(x_0)$ di x_0 e di classe C^1 , tale che

(1) $W(x_0) = 0$, e $W(x) > 0 \forall x \in B(x_0) \setminus \{x_0\}$;

(2) $\dot{W}(x) \leq 0 \forall x \in B(x_0)$.

(3) Supponiamo anche che esista un insieme compatto P tale che: (i) $x_0 \in P$, (ii) P è positivamente invariante, e (iii) non esistono in $P \setminus \{x_0\}$ traiettorie costituite

unicamente da punti z in cui $\dot{W}(z) = 0$.

Allora x_0 è un punto d'equilibrio asintoticamente stabile e P è contenuto nel suo bacino d'attrazione.

Nel nostro caso si può prendere

$$W(x, y) = \frac{1}{2} (x^2 + y^2),$$

e, come insieme P , la chiusura di qualsiasi intorno

$$B_R = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < R^2 \right\}.$$

Si noti che $W(x, y) = R^2/2$ per ogni $(x, y) \in \partial B_R$.

Si verifica facilmente che le ipotesi (1)-(3) del teorema sono soddisfatte. Infatti si ha $W(0, 0) = 0$ e $W(x, y) > 0$ per ogni $(x, y) \neq (0, 0)$, così che segue la (1). Inoltre $\dot{W}(x, y) = -\alpha y^2 \leq 0$, quindi anche la condizione (2) è soddisfatta. L'origine è contenuta in B_R , quindi vale la (3-i). Inoltre $\overline{B_R}$ è positivamente invariante: infatti il campo vettoriale in $(x, y) \in \partial B_R$ ha una componente $(y, -kx)$ tangente e una componente $(0, -\alpha y)$ diretta verticalmente, in modo tale che il vettore risultante è sempre o tangente alla curva ∂B_R (per $y = 0$) o diretto verso l'interno (per $y \neq 0$). Questo prova la (3-ii). Infine, poiché $\dot{W}(x, y) = 0$ solo per $y = 0$ e le traiettorie attraversano l'asse x ortogonalmente (i.e. il campo vettoriale in ogni punto $(x, 0)$, $x \neq 0$, è diretto verticalmente, verso l'alto per $x < 0$ e verso il basso per $x > 0$), anche la (3-iii) è dimostrata. Data l'arbitrarietà di R possiamo concludere che il bacino d'attrazione dell'origine è tutto il piano.

ESERCIZIO 4.

4.1. Costante del moto. Si cerca una funzione $H(x, y)$ tale che

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial y} = x(1 + \alpha x^2), \quad \dot{y} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -y(1 + 3\alpha x^2).$$

Integrando la prima equazione rispetto a y otteniamo

$$H(x, y) = xy(1 + \alpha x^2) + c_1(x),$$

dove $c_1(x)$ è una funzione arbitraria di x , mentre integrando la seconda rispetto a x otteniamo

$$H(x, y) = xy(1 + \alpha x^2) + c_2(y),$$

dove $c_2(y)$ è una funzione arbitraria di y . Possiamo allora uguagliare le due espressioni ponendo $c_1(x) = c_2(y) = \text{cost.} = 0$, e ottenere

$$H(x, y) = xy(1 + \alpha x^2).$$

4.2. Punti d'equilibrio. Si ha $\dot{x} = 0$ per $x = 0$ oppure, se $\alpha < 0$, per $x = \pm x_0$, con $x_0 = \sqrt{-1/\alpha}$. Sostituendo nella seconda e imponendo $\dot{y} = 0$ otteniamo

$$\begin{cases} x = 0 & \implies & y = 0, \\ x = \pm x_0 & \implies & y = 0, \end{cases}$$

Quindi se $\alpha \geq 0$ abbiamo il solo punto d'equilibrio $P_0 = (0, 0)$, mentre se $\alpha < 0$ abbiamo tre punti d'equilibrio: $P_0, P_1 = (x_0, 0)$ e $P_2 = (-x_0, 0)$.

4.3. Stabilità dei punti d'equilibrio. Sia $A(x, y)$ la matrice del sistema linearizzato nell'intorno del punto d'equilibrio (x, y) . Si ha allora

$$A(x, y) = \begin{pmatrix} 1 + 3\alpha x^2 & 0 \\ -6\alpha xy & -1 - 3\alpha x^2 \end{pmatrix}.$$

Per $(x, y) = (0, 0)$ si ottiene

$$A(0, 0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

i cui autovalori sono $\lambda = \pm 1$: quindi P_0 è un punto d'equilibrio instabile per ogni valore di α .

Se $\alpha < 0$ e $(x, y) = (\pm x_0, 0)$ si ottiene

$$A(0, 0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

i cui autovalori sono $\lambda = \pm 2$: quindi anche P_1 e P_2 , quando esistono (i.e. per $\alpha < 0$), sono punti d'equilibrio instabile.

4.4. Analisi qualitativa. Distinguiamo i casi $\alpha \geq 0$ e $\alpha < 0$.

Per $\alpha \geq 0$ la curva di livello

$$\Gamma_0 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : H(x, y) = 0 \right\}$$

contenente il punto d'equilibrio instabile P_0 è data da

$$\begin{aligned} \Gamma_0 &= \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2, \\ \mathcal{C}_1 &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0 \right\}, \\ \mathcal{C}_2 &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0 \right\}, \end{aligned}$$

ed è quindi l'unione dei due assi $x = 0$ e $y = 0$. I versi di percorrenza su tali rette sono tali che

$$\begin{cases} x = 0 & \implies & \dot{x} = 0, & \dot{y} = -y & \implies & \dot{y} > 0 \text{ se e solo se } y < 0, \\ y = 0 & \implies & \dot{y} = 0, & \dot{x} = x(1 + \alpha x^2) & \implies & \dot{x} > 0 \text{ se e solo se } x > 0. \end{cases}$$

Per valori $c \neq 0$ le curve di livello si possono ottenere utilizzando la regolarità della funzione $H(x, y)$.

[Un'analisi più accurata è la seguente. Per $c \neq 0$ la curva di livello Γ_c è data da

$$\Gamma_c = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = f(x) = \frac{c}{x(1 + \alpha x^2)}, \quad x \neq 0 \right\},$$

quindi per $c > 0$ si ha $y > 0$ per $x > 0$ e $y < 0$ per $x < 0$. Sempre per $c > 0$, si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0^\pm} f(x) = \pm\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0^\pm.$$

Inoltre

$$f'(x) = -\frac{c}{x^2(1 + \alpha x^2)^2} (1 + 3\alpha x^2) < 0,$$

quindi f è decrescente, e

$$f''(x) = \frac{2c}{x^3(1 + \alpha x^2)^3} (1 + 3\alpha x^2 + 6\alpha^2 x^4),$$

quindi f è convessa per $x > 0$ e concava per $x < 0$.]

Il verso di percorrenza si ottiene per continuità (i.e. utilizzando la dipendenza continua dai dati iniziali) a partire dalle curve \mathcal{C}_1 e \mathcal{C}_2 .

Analogamente si può discutere il caso $c < 0$. Più asempticamente si può utilizzare la simmetria $H(x, -y) = -H(x, y)$, per concludere che le curve di livello corrispondenti a valori negativi di c si ottengono da quelle corrispondenti a $-c$ per riflessione rispetto all'asse x .

La situazione è rappresentata in Figura 1. Si noti che per $\alpha = 0$ le curve di livello Γ_c , $c \neq 0$, si riducono a delle iperboli.

Per $\alpha < 0$ definiamo $\beta = -\alpha > 0$. Si ha

$$\begin{aligned} \Gamma_0 &= \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2 \cup \mathcal{C}_3 \cup \mathcal{C}_4, \\ \mathcal{C}_1 &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0 \right\}, \\ \mathcal{C}_2 &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0 \right\}, \\ \mathcal{C}_3 &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = x_0 \right\}, \\ \mathcal{C}_4 &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = -x_0 \right\}, \end{aligned}$$

quindi Γ_0 è l'unione di quattro rette.

Per determinare i versi di percorrenza si può notare innanzitutto che sulle curve \mathcal{C}_1 , \mathcal{C}_3 e \mathcal{C}_4 si ha

$$x \in \{0, \pm x_0\} \implies \dot{x} = 0, \quad \dot{y} = -y \implies \dot{y} > 0 \text{ se e solo se } y < 0,$$

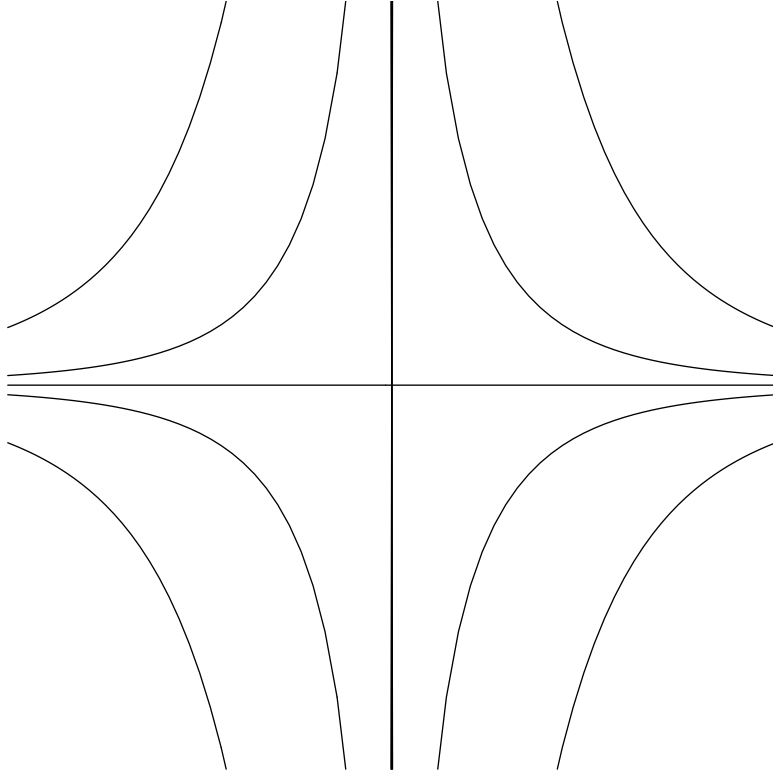


Figura 1. Curve di livello di $H(x, y)$ per $\alpha \geq 0$.

come per $x = 0$ nel caso precedente. Invece sulla retta \mathcal{C}_2 , dove $y = 0$ si ha $\dot{x} > 0$ se e solo se $x > 0, x < x_0$ oppure $x < 0, x < -x_0$, quindi

$$\dot{x} > 0 \text{ se e solo se } 0 < x < x_0 \text{ oppure } x < -x_0.$$

Per altri valori di c , di nuovo, si può utilizzare la continuità della funzione $H(x, y)$.

[Altrimenti, per avere un'analisi più completa, si può ragionare come segue. Per $c \neq 0$ si ha

$$\Gamma_c = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = f(x) = \frac{c}{x(1 - \beta x^2)}, \quad x \neq 0 \right\},$$

quindi per $c > 0$ si ha $y > 0$ per $0 < x < x_0$ e $x < -x_0$ e $y < 0$ per $x > x_0$ e per $-x_0 < x < 0$.

Sempre per $c > 0$, si ha

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^\pm} f(x) &= \pm\infty, & \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) &= 0^\pm, \\ \lim_{x \rightarrow x_0^\pm} f(x) &= \mp\infty, & \lim_{x \rightarrow -x_0^\pm} f(x) &= \mp\infty. \end{aligned}$$

Inoltre

$$f'(x) = -\frac{c}{x^2(1-\beta x^2)^2} (1-3\beta x^2),$$

quindi f è decrescente per $0 < x < x_0/\sqrt{3}$ ed è crescente per $x > x_0/\sqrt{3}$ (i.e. per $x_0/\sqrt{3} < x < x_0$ e per $x > x_0$) e per $x < -x_0$. SI può anche studiare la concavità di f studiando la derivata seconda

$$f''(x) = \frac{2c}{x^3(1-\beta x^2)^3} (1-3\beta x^2 + 6\beta^2 x^4),$$

o più semplicemente basta notare che $f''(x) \neq 0$ per x tale che $f'(x) = 0$, per concludere che la funzione $f(x)$ è o strettamente convessa o strettamente concava, e la concavità si ottiene per compatibilità con il fatto che la funzione è crescente o decrescente.]

Di nuovo i versi di percorrenza si determinano per continuità a partire da quelli sulla curva di livello Γ_0 .

Analogamente – o sfruttando di nuovo il fatto che $H(x, y)$ è dispari in y – si discute il caso $c < 0$. La situazione è rappresentata in Figura 2.

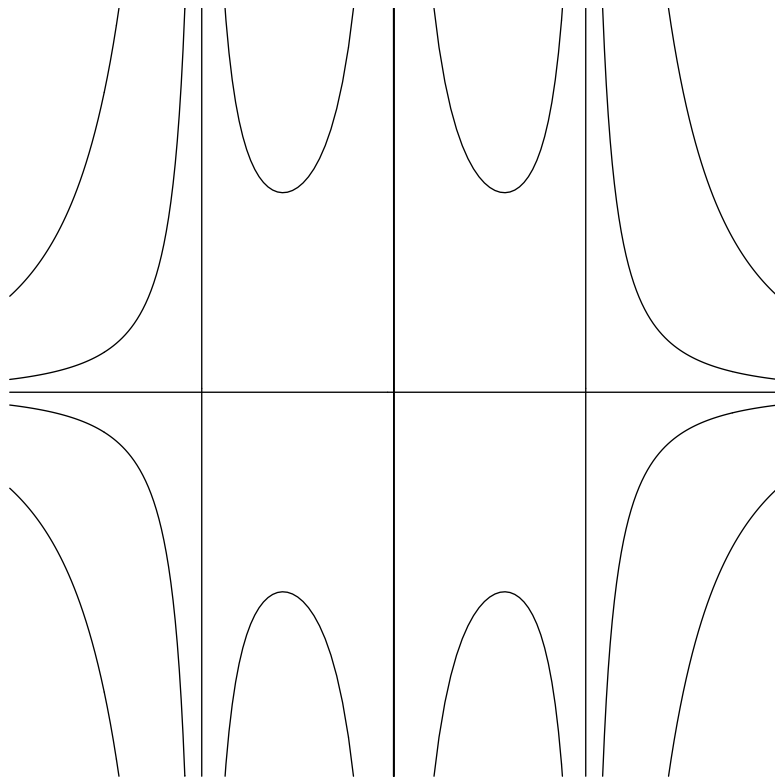


Figura 2. Curve di livello di $H(x, y)$ per $\alpha < 0$.

ESERCIZIO 5. Cfr. Cap. 2, §11, paragrafi 11.7 e 11.8.

ESERCIZIO 6.

6.1. Stabilità asintotica dei punti di minimo. Cfr. Cap. 5, §21, paragrafi 21.4 e 21.7.

6.2. Esempio. Si ha

$$\nabla V(x_1, x_2) = \left(\frac{\partial V}{\partial x_1}(x_1, x_2), \frac{\partial V}{\partial x_2}(x_1, x_2) \right) = (4x_1^3, 2x_2),$$

così che $\nabla V(x_1, x_2) = 0$ solo per $(x_1, x_2) = (0, 0)$. Quindi l'origine è l'unico punto critico di V , e, di conseguenza, l'unico punto d'equilibrio del sistema.

Inoltre tale punto è un punto di minimo isolato (poiché $V(0, 0) = 0$ e $V(x_1, x_2) > 0$ per ogni $(x_1, x_2) \neq (0, 0)$), quindi possiamo applicare il risultato del punto precedente e concludere che l'origine è un punto d'equilibrio asintoticamente stabile.

Le curve di livello di V sono le curve

$$\Sigma_c = \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^4 + x_2^2 = c \right\},$$

che si possono riscrivere come

$$\Sigma_c = \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 = \pm f(x_1), \quad |x_1| \leq c^{1/4} \right\}, \quad f(x) = \sqrt{c - x^4},$$

dove $c \geq 0$.

La funzione $x \rightarrow f(x)$ è definita per $|x| < c^{1/4}$, e per tali valori di x si ha

$$f'(x) = \frac{df}{dx}(x) = -\frac{2x^3}{f(x)},$$

quindi f è crescente per $-c^{1/4} \leq x < 0$ e decrescente per $0 < x < c^{1/4}$, la sua derivata vale $\pm\infty$ per $x = \mp c^{1/4}$ e si annulla per $x = 0$. Concludiamo allora che per ogni $c \geq 0$ la curva Σ_c è una curva chiusa che contiene l'origine $(0, 0)$ al suo interno.

Inoltre la regione

$$B_c = \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : V(x_1, x_2) \leq c \right\}$$

definisce un insieme compatto positivamente invariante: infatti su ∂B_c il campo vettoriale è ortogonale alla curva e diretto verso l'interno (in quanto $\dot{V}(x_1, x_2) \leq 0$ e V cresce allontanandosi dall'origine). Inoltre $\dot{V}(x_1, x_2) = 0$ solo per $(x_1, x_2) = (0, 0)$ e $V(x_1, x_2) < 0$ per ogni altro punto (x_1, x_2) . Possiamo quindi applicare il teorema di Barbašin-Krasovskij, per concludere che B_c è contenuto nel bacino d'attrazione dell'origine. Per l'arbitrarietà di c il bacino d'attrazione deve essere l'intero piano.

Si noti che lo stesso risultato si poteva ottenere con il teorema di Ljapunov.
