Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2005/2006

FM1 - Equazioni differenziali e meccanica

PRIMA PROVA D'ESONERO (30-05-2006)

CORREZIONE

<u>ESERCIZIO 1.</u> Cfr. Cap. 6, §28, paragrafo 28.11.

<u>ESERCIZIO 2.</u> Cfr. Cap. 7, §30, lemma 30.9 e paragrafo 30.10.

<u>ESERCIZIO 3.</u> Cfr. Cap. 7, §30, paragrafi 30.21 ÷ 30.26.

<u>ESERCIZIO 4.</u>

4.1. Grafico dell'energia potenziale per $\alpha = 0$. Per $\alpha = 0$ l'energia potenziale diventa

$$V(x) = \frac{2}{3}x^3 - 2\beta x.$$

Si ha

$$V'(x) = 2x^2 - 2\beta, \qquad V''(x) = 4x,$$

così che si ha $V'(x) = 0$ per $x^2 = \beta$. Quindi se $\beta > 0$ si hanno due punti stazionari $x = \pm x_\beta$, dove $x_\beta = \sqrt{\beta}$, se $\beta = 0$ si ha un solo punto stazionario $x = 0$ e se $\beta < 0$ non si hanno punti stazionari. Inoltre se $\beta > 0$ si ha $V''(x_\beta) = 4\sqrt{\beta} > 0$ e $V''(-x_\beta) = -4\sqrt{\beta} < 0$: quindi $x = x_\beta$ è un punto di minimo e $x = -x_\beta$ è un punto di massimo. Notando che $V(0) = 0$ si può dedurre che $-V(x_\beta) > 0$ e $V(x_\beta) < 0$. Inoltre si ha

$$\lim_{x\to\pm\infty} V(x) = \pm\infty,$$

indipendentemente da β. Infine $V'(x) > 0$ per ogni x se $\beta < 0$ e per ogni $x \neq 0$ se $\beta = 0$. Se $\beta = 0$ si ha $V''(0) = 0$, quindi in tale caso $x = 0$ è un punto di flesso orizzontale.

Quindi il grafico dell'energia potenziale è come rappresentato in Figura 1 per $\beta < 0$, in Figura 2 per $\beta = 0$ e in Figura 3 per $\beta > 0$.

4.2. Punti d'equilibrio per $\alpha = 0$. Il sistema dinamico associato al sistema meccanico unidimensionale dato è

$$\begin{cases} \dot{x} = my, \\ \dot{y} = -V'(x), \end{cases}$$

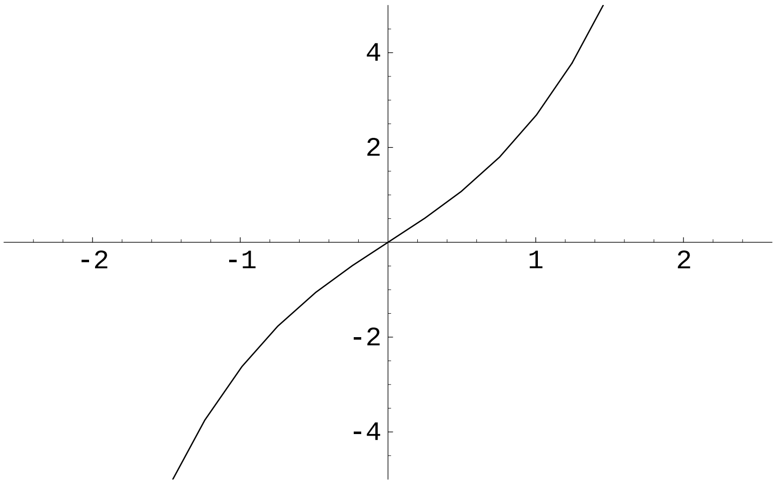

Figura 1. Grafico dell'energia potenziale $V(x)$ per $\alpha = 0$ e $\beta < 0$.

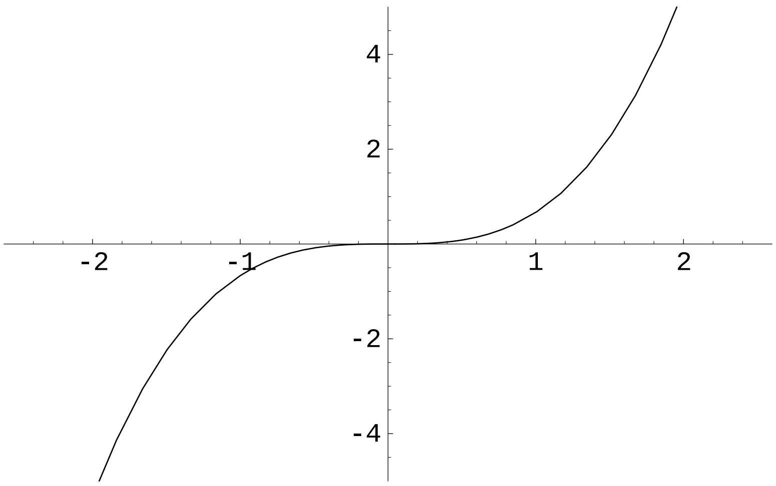

Figura 2. Grafico dell'energia potenziale $V(x)$ per $\alpha = 0$ e $\beta = 0$.

quindi i punti d'equilibrio corrispondenti sono i punti $(x_0, 0)$, con $V'(x_0) = 0$.

Se $\beta < 0$ non ci sono punti d'equilibrio. Se $\beta = 0$ c'è il solo punto d'equilibrio $(0, 0)$. Se $\beta > 0$ avremo due punti d'equilibrio: $(x_\beta, 0)$ e $(-x_\beta, 0)$.

4.3. Stabilità dei punti d'equilibrio per $\alpha = 0$. Per $\beta = 0$ il punto d'equilibrio $(0, 0)$ è un punto d'equilibrio instabile perché corrisponde a un punto di flesso orizzontale.

Per $\beta > 0$ il punto d'equilibrio $(x_\beta, 0)$ è un punto d'equilibrio stabile, per il teorema di Dirichlet (dal momento che corrisponde a un punto di minimo isolato per l'energia

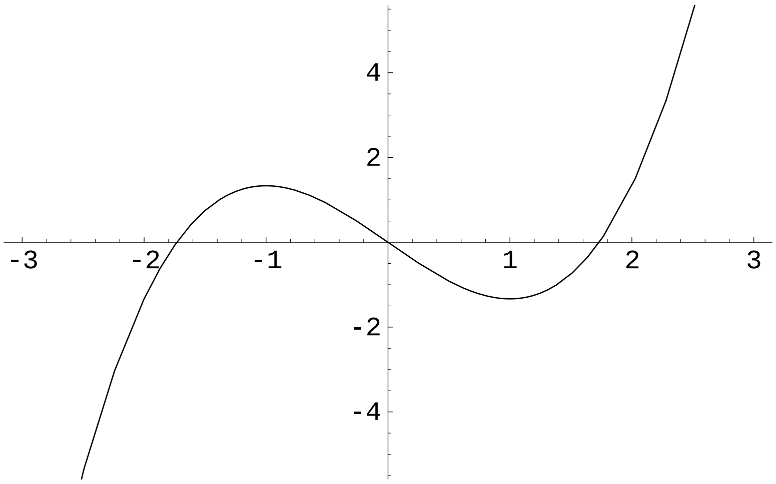

Figura 3. Grafico dell'energia potenziale $V(x)$ per $\alpha = 0$ e $\beta > 0$.

potenziale), mentre $(-x_\beta, 0)$ è un punto d'equilibrio instabile perché corrisponde a un punto di massimo.

4.4. Analisi qualitativa per $\alpha = 0$. Studiamo le curve di livello

$$\Gamma_E = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{2} m y^2 + V(x) = E \right\}$$

dell'energia del sistema. Se definiamo

$$F(x) = \sqrt{\frac{2}{m}\,(E - V(x))},$$

in modo da poter riscrivere

$$\Gamma_E = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = \pm F(x) \right\},$$

si ha

$$F'(x) = \sqrt{\frac{6}{m}}\,\frac{\beta - x^2}{\sqrt{3E + 6\beta x - 2x^3}},$$
$$F''(x) = \sqrt{\frac{6}{m}}\,\frac{-3\beta^2 - 6Ex - 6\beta\, x^2 + x^4}{(3E + 6\beta x - 2x^3)^{3/2}}.$$

Poiché Γ_E è simmetrica rispetto all'asse x, è sufficiente studiarla nel semipiano superiore $y \geq 0$. Inoltre i versi di percorrenza delle orbite saranno, in tale semipiano, sempre da sinistra a destra poiché $\dot{x} = my \geq 0$.

Dai grafici delle Figure 1÷3 vediamo che, per ogni valore di β, $\Gamma_E \neq \emptyset$ per ogni valore di $E \in \mathbb{R}$.

Distinguiamo i casi $\beta < 0$, $\beta = 0$ e $\beta > 0$.

Per $\beta < 0$ si ha la situazione rappresentata in Figura 4. Infatti per $\beta < 0$ si ha $F'(x) < 0$, quindi $F(x)$ è strettamente decrescente per ogni valore di E. Inoltre per ogni valore fissato di E la funzione $F(x)$ è definita per $x \leq x_E$, dove x_E è l'unica radice di $E - V(x) = 0$. In $x = x_E$ si ha $F'(x_E) = -\infty$, quindi la curva di livello Γ_E in $x = x_E$ ha tangente verticale. Inoltre $F(x) \sim \text{const.}x^{3/2}$ per $x \to -\infty$, quindi poiché $F(x)$ è concava per $x \to 0$ e convessa per $x \to -\infty$ deve esserci almeno un punto in cui la funzione cambia concavità.

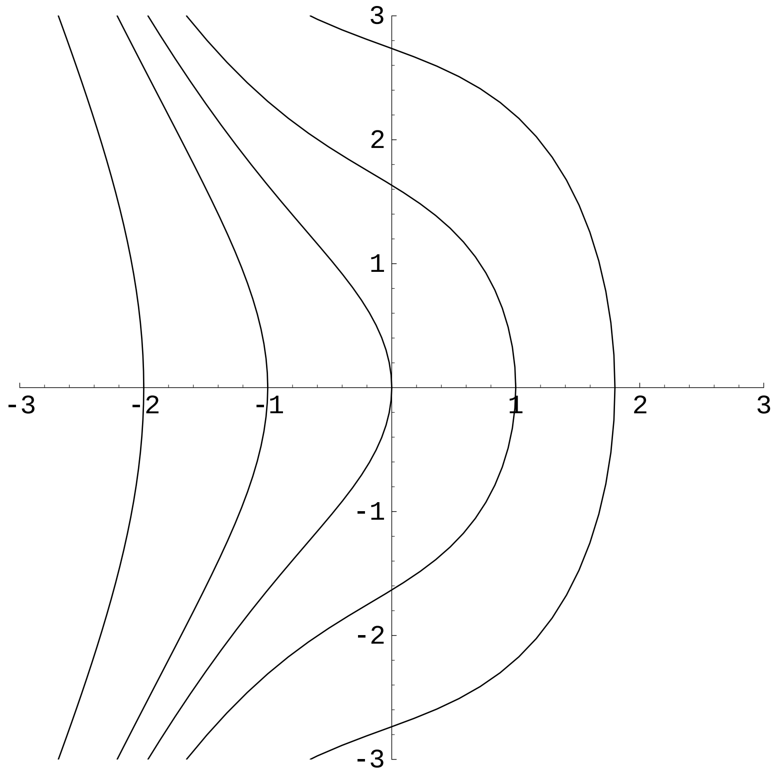

Figura 4. Piano delle fasi per $\alpha = 0$ e $\beta < 0$.

Per $\beta = 0$ si ha la situazione rappresentata in Figura 5. In tal caso per ogni valore di $E \neq 0$ si ha $F'(x) < 0$ tranne che per $x = 0$ dove $F'(0) = 0$; inoltre, definendo di nuovo x_E l'unica radice di $E - V(x) = 0$, per $E \neq 0$ si ha che $F(x)$ è definita per $x \leq x_E$, $F'(x) < 0$ per $x \neq x_E$ e $F'(x_E) = -\infty$. Il caso $E = 0$ va discusso a parte perché per determinare il valore di $F'(x)$ in $x = x_E = x_0 = 0$ si deve tener conto che, in tal caso, per $x = 0$ si annullano sia il numeratore sia il denominarore di $F'(x)$. Si ha

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{x^2}{\sqrt{3E+6\beta x-2x^3}} = \lim_{x\to 0^-} \frac{x^2}{\sqrt{-2x^3}} = \lim_{x\to 0^-} |x|^{1/2} = 0,$$

quindi la derivata di $F(x)$ si annulla in $x = 0$, i.e. la funzione $F(x)$ ha tangente orizzontale in $x = 0$, ovvero Γ_0 forma una cuspide in $x = 0$.

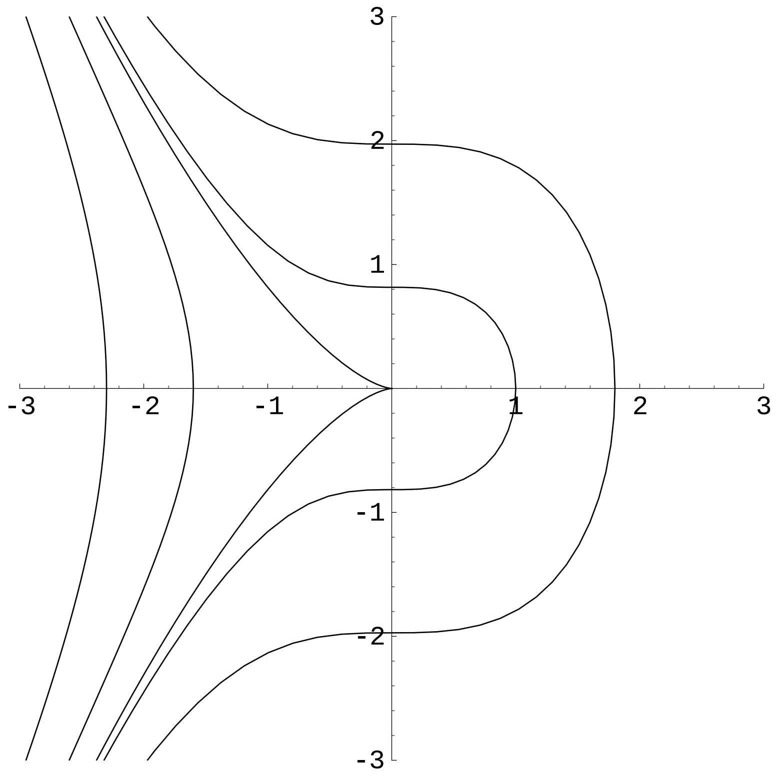

Figura 5. Piano delle fasi per $\alpha = 0$ e $\beta = 0$.

Per $\beta > 0$ si ha la situazione rappresentata in Figura 6. In tal caso, infatti, per disegnare le curve di livello dobbiamo distinguere i casi (i) $E < E_1$, (ii) $E = E_1$, (iii) $E_1 < E < E_2$, (iv) $E = E_2$ e (v) $E > E_2$, dove $E_1 = V(x_\beta)$ ed $E_2 = V(-x_\beta)$.

Caso (i). Per $E < E_1$ l'equazione $E - V(x) = 0$ ha una sola radice $x = x_E$, e risulta $\Gamma_E = \gamma_E$, dove la γ_E definisce una curva aperta con grafico $x \to \pm F(x)$, definita per $x \leq x_E$, tale che $F(x)$ è strettamente decrescente e interseca l'asse x in $x = x_E$ con tangente verticale.

Caso (ii). Per $E = E_1$ si ha $\Gamma_{E_1} = \gamma_{E_1} \cup \{(x_\beta, 0)\}$, dove γ_{E_1} è qualitativamente simile alle curve γ_E del caso (i), mentre $(x_\beta, 0)$ è il punto d'equilibrio stabile.

Caso (iii). Per $E \in (E_1, E_2)$ l'equazione $E - V(x) = 0$ ammette tre radici distinte $x_E < x_E^1 < x_E^2$. Si ha allora $\Gamma_E = \gamma_E \cup \delta_E$, dove γ_E è di nuovo qualitativamente simile ai casi precedenti, mentre δ_E è una curva chiusa che interseca l'asse x nei due punti x_E^1 e x_E^2. Tale curva è una curva regolare simmetrica rispetto all'asse x: in particolare la tangente alla curva in $x = x_E^1$ e in $x = x_E^2$ è verticale, e in $x = x_\beta$ è orizzontale. La traiettoria che ha supporto in δ_E è periodica.

Caso (iv). Per $E = E_2$ la curva di livello Γ_E rappresenta una separatrice costituita da 4 orbite distinte: il punto d'equilibrio instabile $(-x_\beta, 0)$, un'orbita omoclina definita per $-x_\beta < x < x'_{E_2}$ (se x'_{E_2} e $-x_\beta$ rappresentano le due radici dell'equazione $E - V(x) = 0$) e due orbite definite per $x < -x_\beta$, e asintotiche al punto d'equilibrio instabile (nel futuro quella nel semipiano superiore e nel passato quella nel semipiano inferiore). La tangente alla curva $F(x)$ in $x = -x_\beta$ è obliqua poiché $V''(-x_\beta) \neq 0$.

Caso (v). Per $E > E_2$ se definiamo x_E l'unica radice di $E - V(x) = 0$ si ha che la funzione $F(x)$ è definita per $x \leq x_E$. Inoltre $F'(x) > 0$ per $|x| < \sqrt{\beta}$, i.e. per $-x_\beta < x < x_\beta$, $F'(x) = 0$ per $x = \pm x_\beta$ e $F'(x) < 0$ altrimenti. In particolare $F'(x_E) = -\infty$, mentre $F'(x)$ è finita per ogni altro valore di x.

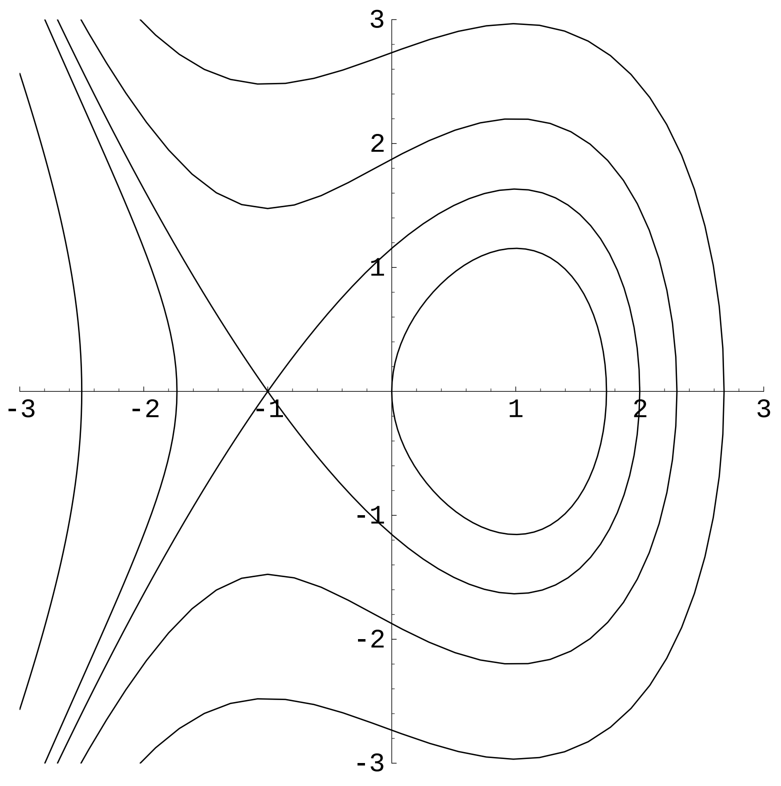

Figura 6. Piano delle fasi per $\alpha = 0$ e $\beta > 0$.

4.5. Discussione del caso $\alpha > 0$. Per $\alpha \neq 0$ l'energia potenziale è

$$V(x) = \frac{\alpha}{5}x^5 + \frac{2}{3}x^3 - 2\beta x.$$

Si ha quindi

$$V'(x) = \alpha x^4 + 2x^2 - 2\beta, \qquad V''(x) = 4\alpha x^3 + 4x = 4x\left(\alpha x^2 + 1\right),$$

così che si ha $V'(x) = 0$ per

$$x^2 = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 2\alpha\beta}}{\alpha}.$$

Se $\alpha > 0$ si deve avere $\sqrt{1 + 2\alpha\beta} \geq 1$ perché almeno uno dei due valori sia positivo, quindi $2\alpha\beta \geq 0$, ovvero $\beta \geq 0$.

Possiamo concludere che per $\alpha > 0$ si hanno punti stazionari solo se $\beta \geq 0$, nel qual caso si deve prendere solo la determinazione positiva $x^2 = (\sqrt{1 + 2\alpha\beta} - 1)/\alpha$, che dà

$$\begin{cases} \text{per } \beta = 0 & \Longrightarrow \quad x = 0, \\ \text{per } \beta > 0 & \Longrightarrow \quad x = \pm x_0, \qquad x_0 = \sqrt{\dfrac{\sqrt{1 + 2\alpha\beta} - 1}{\alpha}}, \end{cases}$$

mentre per $\beta < 0$ non si hanno punti stazionari.

Inoltre si ha

$$\lim_{x \to \pm\infty} V(x) = \pm\infty,$$

indipendentemente da β. Infine $V'(x) > 0$ per ogni x se $\beta < 0$ e per ogni $x \neq 0$ se $\beta = 0$. Se $\beta > 0$, tenendo conto degli andamenti asintotici di $V(x)$, possiamo concludere che $x = -x_0$ è un punto di massimo e $x = x_0$ è un punto di minimo.

Quindi la situazione è molto simile al caso $\alpha = 0$, e i grafici dell'energia potenziale $V(x)$ sono qualitativamente simili a quelli rappresentati in Figura 1 per $\beta < 0$, in Figura 2 per $\beta = 0$ e in Figura 3 per $\beta > 0$. In maniera analoga, anche l'analisi qualitativa del sistema può essere discussa come nel caso $\alpha = 0$, e qualitativamente si trovano orbite come rappresentate in Figura 4 per $\beta < 0$, in Figura 5 per $\beta = 0$ e in Figura 6 per $\beta > 0$.

<u>Esercizio 5.</u> Cfr. Cap. 8, §33, paragrafi 33.13 ÷ 33.17.

<u>Esercizio 6.</u> Cfr. Cap. 10, §42, paragrafi 42.2 ÷ 42.4. Come esempio di operatore d'inerzia non definito strettamente positivo cfr. Cap. 10,§42, paragrafi 42.28 o 42.29.
