Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2006/2007

FM1 - Equazioni differenziali e meccanica

Prima prova d'esonero (03-04-2006)

<u>Esercizio 1.</u> [5] Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

si calcoli $\exp(At)$ per $t \in \mathbb{R}$, e si usi il risultato per risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax, \\ x(0) = (1, 0). \end{cases}$$

<u>Esercizio 2.</u> [3] Sia $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione non negativa di classe C^1. Si dimostri che, se esiste una costante $k \in \mathbb{R}$ tale che $\dot{g}(t) \leq kg(t)$ per $t \geq 0$, allora $g(t) \leq g(0)\,\mathrm{e}^{kt}$ per $t \geq 0$.

<u>Esercizio 3.</u> [6] Dato il problema di Cauchy in $\mathbb{R}$

$$\begin{cases} \dot{x} = |x|, \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

si risponda alle seguenti domande.
(3.1) Quante soluzioni esistono?
(3.2) Si trovi esplicitamente una soluzione, e se ne discuta la regolarità in t.
(3.3) Si verifichi che $x_0 = 0$ è un punto d'equilibrio, e se ne discuta la stabilità.

<u>Esercizio 4.</u> [3] Sia $L_\omega(x)$ l'insieme ω-limite di x. Si dimostri che $L_\omega(x)$ è invariante.

<u>Esercizio 5.</u> [4] Sia E uno spazio vettoriale e siano S, T due operatori linerari in E. Si dimostri che se $ST = TS$ allora $\exp(S + T) = \exp S \exp T$, e si utilizzi il risultato per dimostrare che $(\exp S)^{-1} = \exp(-S)$.

<u>Esercizio 6.</u> [12] Sia dato il sistema dinamico planare

$$\begin{cases} \dot{x} = 5y^4 - 6y^2\left(x^2+1\right) + \left(x^2-1\right)^2, \\ \dot{y} = 4xy\left(1 + y^2 - x^2\right). \end{cases}$$

(6.1) Si dimostri che la funzione

$$H(x, y) = y\,(y - x - 1)\,(y + x + 1)\,(y - x + 1)\,(y + x - 1)$$

è una costante del moto per il sistema.
(6.2) Si determinino i punti d'equilibrio.
(6.3) Se ne discuta la stabilità.
(6.4) Si studino qualitativamente la traiettorie del sistema.

<u>Esercizio 7.</u> [6] Dato il sistema dinamico planare

$$\begin{cases} \dot{x} = 2y, \\ \dot{y} = 4x\left(x^2-1\right), \end{cases}$$

si risponda alle seguenti domande.
(1) Si dimostri che l'origine è un punto d'equilibrio stabile.
(2) Si dimostri che se si aggiunge un campo vettoriale $(-\alpha x, -\alpha y)$, con $\alpha > 0$, l'origine diventa un un punto d'equilibrio asintoticamente stabile.

<u>Esercizio 8.</u> [3] Si consideri il sistema dinamico lineare $\dot{x} = Ax$. Si dimostri che se tutti gli autovalori di A hanno parte reale (strettamente) negativa allora $x = 0$ è un punto d'equilibrio asintoticamente stabile.