Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2006/2007

FM1 - Equazioni differenziali e meccanica

PRIMA PROVA D'ESONERO (03-04-2006)

CORREZIONE

<u>ESERCIZIO 1.</u> Lo spettro $\Sigma(A)$ della matrice A si trova risolvendo l'equazione

$$\det (A - \lambda \mathbb{1}) = (1-\lambda)^2 - 1 = \lambda\,(\lambda - 2)\,,$$

quindi $\Sigma(A) = \{\lambda_1, \lambda_2\} = \{0, 2\}$. Gli autovettori corrispondenti si ottengono imponendo

$$(A - \lambda_k \mathbb{1})\, v_k = \begin{pmatrix} 1-\lambda_k & 1 \\ 1 & 1-\lambda_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{k1} \\ v_{k2} \end{pmatrix}, \qquad k = 1, 2,$$

e sono

$$\begin{cases} \lambda_1 = 0 & \Longrightarrow \quad v_1 = (1, -1), \\ \lambda_2 = 2 & \Longrightarrow \quad v_2 = (1, 1). \end{cases}$$

La matrice del cambiamento di base è

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \Longrightarrow \qquad Q^{-1} = P^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \Longrightarrow \qquad Q = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Possiamo quindi scrivere

$$A = Q^{-1} B Q, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

e, analogamente, per ogni $t \in \mathbb{R}$,

$$At = Q^{-1} (Bt) Q, \qquad Bt = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2t \end{pmatrix}.$$

Quindi

$$\exp(At) = \mathrm{e}^{At} = Q^{-1} \mathrm{e}^{Bt} Q, \qquad \mathrm{e}^{Bt} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{2t} \end{pmatrix},$$

che dà

$$\mathrm{e}^{At} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{2t}+1 & \mathrm{e}^{2t}-1 \\ \mathrm{e}^{2t}-1 & \mathrm{e}^{2t}+1 \end{pmatrix}.$$

La soluzione del problema di Cauchy è allora

$$x(t) = \mathrm{e}^{At} x_0 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{2t}+1 & \mathrm{e}^{2t}-1 \\ \mathrm{e}^{2t}-1 & \mathrm{e}^{2t}+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

che implica

$$x_1(t) = \frac{\mathrm{e}^{2t}+1}{2}, \qquad x_2(t) = \frac{\mathrm{e}^{2t}-1}{2}.$$

<u>ESERCIZIO 2.</u> Cfr. Cap. 4, §17, paragrafi 17.3, 17.5 e 17.6.

Esercizio 3.

3.1. Unicità della soluzione. La funzione $x \to |x|$ è lipschitziana, quindi si applica il teorema di esistenza e unicità: quindi il problema di Cauchy ammette un'unica soluzione.

3.2. Soluzione e sua regolarità. Se $x_0 = 0$ si vede subito che $x(t) = 0$ è soluzione. Se $x_0 \neq 0$, si distinguano i casi $x_0 > 0$ e $x_0 < 0$.

Consideriamo prima il caso $x_0 > 0$. Poiché la soluzione è continua in t, se $x_0 > 0$ allora la soluzione $x(t)$ verificherà $x(t) > 0$ almeno per t piccoli. Per tali t l'equazione diventa $\dot{x} = x$, che si risolve per separazione di variabili:

$$\int_{x_0}^{x(t)} \frac{\mathrm{d}x}{x} = \int_0^t \mathrm{d}s = t \qquad \Longrightarrow \qquad \log|x(t)| - \log|x_0| = t,$$

dove possiamo scrivere $|x(t)| = x(t)$ e $|x_0| = x_0$. Quindi otteniamo $x(t) = \mathrm{e}^t x_0$, fintanto che $x(t) > 0$. Ma $\mathrm{e}^t > 0$ per ogni $t \in \mathbb{R}$, quindi $x(t) = \mathrm{e}^t x_0$ è la soluzione per $x_0 > 0$.

Per $x_0 < 0$ si ragiona in modo analogo, e si arriva all'equazione $\dot{x} = -x$, che di nuovo si risolve per separazione di variabili:

$$\int_{x_0}^{x(t)} \frac{\mathrm{d}x}{x} = -\int_0^t \mathrm{d}s = -t \qquad \Longrightarrow \qquad \log|x(t)| - \log|x_0| = -t,$$

che dà $|x(t)| = \mathrm{e}^{-t}|x_0|$. Tenendo conto che $|x(t)| = -x(t)$ e $|x_0| = -x_0$, troviamo $x(t) = \mathrm{e}^{-t}x_0$, fintanto che $x(t) < 0$. Come nel caso precedente possiamo quindi concludere che la soluzione è $x(t) = \mathrm{e}^t x_0$ per $x_0 < 0$. Tenendo conto che per $x_0 = 0$ la soluzione è $x(t) = 0$ per $x_0 = 0$ possiamo scrivere che la soluzione è

$$x(t) = \begin{cases} \mathrm{e}^t x_0, & x_0 \geq 0, \\ \mathrm{e}^{-t} x_0, & x_0 < 0, \end{cases}$$

per ogni $x_0 \in \mathbb{R}$ e ogni $t \in \mathbb{R}$. In particolare la soluzione è C^∞ in t.

3.3. Stabilità dell'origine. Si è verificato al punto precedente che $x = 0$ è un punto d'equilibrio: infatti il campo vettoriale si annulla per $x = 0$. La soluzione è data da $x(t) = \mathrm{e}^t x_0$ per $x_0 > 0$, quindi si ha

$$\lim_{t \to \infty} x(t) = \infty \qquad \text{se } x_0 > 0,$$

così che possiamo concludere che l'origine è un punto d'equilibrio instabile.

Esercizio 4. Cfr. Cap. 4, §16, paragrafo 16.21.

Esercizio 5. Cfr. Cap. 1, §2, paragrafo 2.9, punti (2) e (3).

Esercizio 6.

6.1. Costante del moto. Possiamo scrivere

$$\begin{aligned} H(x,y) &= y\left(y^2 - (x+1)^2\right)\left(y^2 - (x-1)^2\right) = y^5 - y^3\left((x-1)^2 + (x+1)^2\right) + y(x+1)^2(x-1)^2 \\ &= y^5 - 2y^3\left(x^2+1\right) + y(x^2-1)^2. \end{aligned}$$

Si ha

$$\begin{aligned} H_x &= \frac{\partial H}{\partial x} = -4xy^3 + 4xy\left(x^2 - 1\right) = -4xy\left(y^2 - x^2 + 1\right), \\ H_y &= \frac{\partial H}{\partial y} = 5y^4 - 6y^2\left(x^2+1\right) + (x^2-1)^2. \end{aligned}$$

quindi $\dot{x} = H_y$ e $\dot{y} = -H_x$, così che

$$\dot{H} = H_x \dot{x} + H_y \dot{y} = H_x H_y - H_y H_x = 0.$$

6.2. Punti d'equilibrio. Si ha $\dot{y} = 0$ per $x = 0$ oppure $y = 0$ oppure $x^2 = 1 + y^2$. Imponendo che per tali valori anche $\dot{x} = 0$ si trova:

$$\begin{cases} x = 0 & \Longrightarrow \quad 5y^4 - 6y^2 + 1 = 0, \\ y = 0 & \Longrightarrow \quad x^2 - 1 = 0, \\ x^2 = 1 + y^2 & \Longrightarrow \quad 5y^4 - 6y^2 \left(2 + y^2\right) + y^4 = 0. \end{cases}$$

Quindi per $x = 0$ abbiamo

$$y^2 = \frac{1}{5} \left(3 \pm \sqrt{9 - 5}\right) = \frac{3 \pm 2}{5} = \begin{cases} 1, \\ 1/5, \end{cases}$$

che dà i quattro punti d'equilibrio

$$P_1 = (0, 1), \qquad P_2 = (0, 1/\sqrt{5}), \qquad P_3 = (0, -1/\sqrt{5}), \qquad P_4 = (0, -1).$$

Per $y = 0$ troviamo $x = \pm 1$, che implica due altri punti d'equilibrio

$$P_5 = (1, 0), \qquad P_6 = (-1, 0).$$

Infine, se scriviamo $x^2 = 1 + y^2$, y deve soddisfare l'equazione

$$5y^4 - 12y^2 - 6y^4 + y^4 = -12y^2 = 0,$$

che implica $y = 0$, e quindi $x = \pm 1$. Di conseguenza ritroviamo i punti d'equilibrio P_5 e P_6.

Si hanno quindi in tutto i 6 punti d'equilibrio $P_1 = (0, 1)$, $P_2 = (0, 1/\sqrt{5})$, $P_3 = (0, -1/\sqrt{5})$, $P_4 = (0, -1)$, $P_5 = (1, 0)$ e $P_6 = (-1, 0)$; cfr. Figura 1.

6.3. Stabilità dei punti d'equilibrio. Sia $A(x, y)$ la matrice del sistema linearizzato nell'intorno del punto d'equilibrio (x, y). Si ha

$$A(x, y) = \begin{pmatrix} H_{xy} & H_{yy} \\ -H_{xx} & -H_{xy} \end{pmatrix},$$

dove

$$\begin{aligned} H_{xx} &= \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} = -4y^3 + 12yx^2 - 4y = 4y \left(3x^2 - y^2 - 1\right), \\ H_{xy} &= \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} = -12xy^2 + 4x^3 - 4x = 4x \left(x^2 - 3y^2 - 1\right), \\ H_{yy} &= \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} = 20y^3 - 12y \left(x^2 + 1\right) = 4y \left(5y^2 - 3x^2 - 3\right). \end{aligned}$$

Si ottiene

$$A(\pm 1, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A(0, \pm 1) = \begin{pmatrix} 0 & \pm 8 \\ \pm 8 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A(0, \pm 1/\sqrt{5}) = \begin{pmatrix} 0 & \mp 8/\sqrt{5} \\ \pm 24/5\sqrt{5} & 0 \end{pmatrix},$$

e gli autovalori corrispondenti sono:

$$\begin{cases} P_1 & \Longrightarrow \quad \lambda_1 = -\lambda_2 = 8, \\ P_2 & \Longrightarrow \quad \lambda_1 = -\lambda_2 = i8\sqrt{3}/5, \\ P_3 & \Longrightarrow \quad \lambda_1 = -\lambda_2 = i8\sqrt{3}/5, \\ P_4 & \Longrightarrow \quad \lambda_1 = -\lambda_2 = 8, \\ P_5 & \Longrightarrow \quad \lambda_1 = \lambda_2 = 0, \\ P_6 & \Longrightarrow \quad \lambda_1 = \lambda_2 = 0. \end{cases}$$

Possiamo concludere che P_1 e P_4 sono punti d'equilibrio instabile poiché almeno un autovalore del sistema linearizzato ha parte reale positiva.

Non possiamo invece concludere nulla riguardo agli altri punti. Prima di procedere andiamo a studiare le curve di livello della funzione H,

$$\Gamma_E = \Big\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : H(x, y) = E \Big\},$$

iniziando dai valori che corrispondono ai punti d'equilibrio instabile trovati, cioè P_1 e P_4.

Si ha $H(0, \pm 1) = 0$. Si vede subito che Γ_0 è data dall'unione di quattro rette:

$$\begin{aligned}
&\Gamma_0 = \mathcal{C}_0 \cup \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2 \cup \mathcal{C}_3 \cup \mathcal{C}_4, \\
&\mathcal{C}_0 = \Big\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0 \Big\}, \\
&\mathcal{C}_1 = \Big\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x + 1 \Big\}, \\
&\mathcal{C}_2 = \Big\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x - 1 \Big\}, \\
&\mathcal{C}_3 = \Big\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = -x + 1 \Big\}, \\
&\mathcal{C}_4 = \Big\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = -x - 1 \Big\},
\end{aligned}$$

e contiene, oltre ai punti P_1 e P_4, anche i punti P_5 e P_6. Tali rette sono invarianti. La situazione è rappresentata in Figura 1.

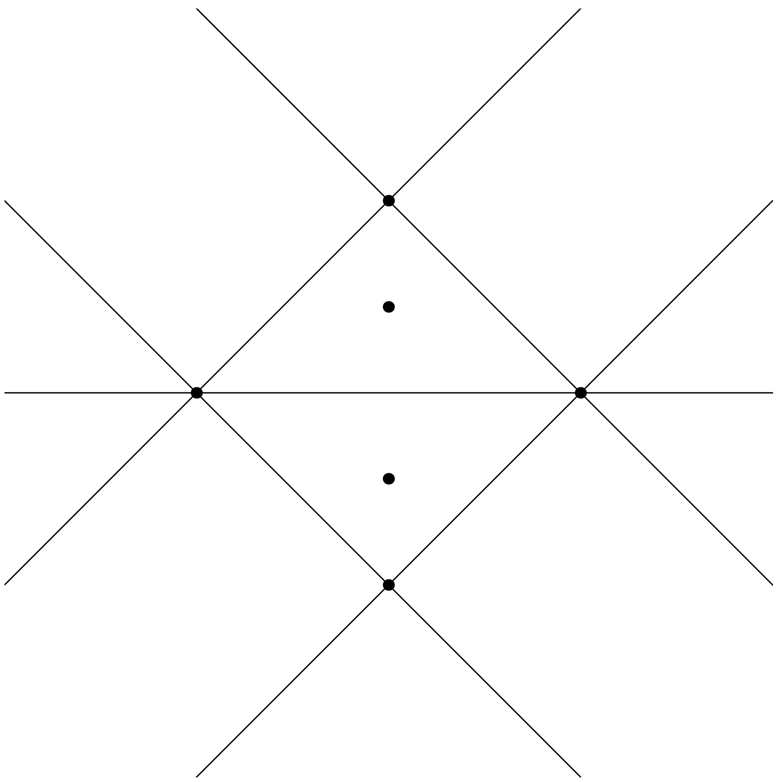

Figura 1. Curva di livello Γ_0 e punti d'equilibrio.

I versi di percorrenza si ricavano immediatamente dal campo vettoriale.

Sulla retta $\mathcal{C}_0$ si ha $y = 0$, quindi $\dot{y} = 0$ e $\dot{x} = (x-1)^2 > 0$ per $|x| \neq 1$, così che il verso di percorrenza è sempre da sinistra a destra.

Sulla retta $\mathcal{C}_1$, ove $y = x+1$, si ha $\dot{y} = 4x(x+1)\left((x+1)^2 + 1 - x^2\right) = 8x(x+1)^2$, quindi $\dot{y} > 0$ per $x > 0$ e $\dot{y} < 0$ per $x < 0$.

Sulla retta $\mathcal{C}_2$, ove $y = x-1$, si ha $\dot{y} = 4x(x-1)\left((x-1)^2 + 1 - x^2\right) = -8x(x-1)^2$, quindi $\dot{y} > 0$ per $x < 0$ e $\dot{y} < 0$ per $x > 0$.

Sulla retta $\mathcal{C}_3$, ove $y = -x+1$, si ha $\dot{y} = 4x(1-x)\left((1-x)^2 + 1 - x^2\right) = 8x(1-x)^2$, quindi $\dot{y} > 0$ per $x > 0$ e $\dot{y} < 0$ per $x < 0$.

Sulla retta $\mathcal{C}_4$, ove $y = -x-1$, si ha $\dot{y} = -4x(1+x)\left((1+x)^2 + 1 - x^2\right) = -8x(1+x)^2$, quindi $\dot{y} > 0$ per $x < 0$ e $\dot{y} < 0$ per $x > 0$.

Si vede in particolare ci sono direzioni lungo le quali ci si allontana dal punto d'equilibrio P_5 e direzioni lungo l e quali ci si allontana dal punto d'equilibrio P_6: quindi anche P_5 e P_6 sono punti d'equilibrio instabile.

Per studiare la stabilità dei punti d'equilibrio restanti cerchiamo di applicare il teorema di Ljapunov.

Consideriamo la regione compatta A definita da

$$A = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1 - |x| \right\},$$

cioè la regione racchiusa tra le curve $\mathcal{C}_0$, $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_3$. Sulla frontiera di A la funzione H si annulla, e all'interno c'è un solo puntio stazionario, P_2, dove la funzione H assume il valore

$$H(0, 1/\sqrt{5}) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1}{25} - \frac{2}{5} + 1 \right) = \frac{1 - 10 + 25}{25\sqrt{5}} > 0.$$

Quindi, per continuità, la funzione H è sempre strettamente positiva all'interno di A.

Poiché per il teorema di Weierstrass la funzione H deve avere massimi e minimi in A possiamo quindi concludere che il valore minimo è 0 ed è assunto sulla frontiera, mentre il valore massimo è $H(0, 1/\sqrt{5})$ ed è assunto in P_2.

In conclusione P_2 è un punto di massimo (locale) per H. Possiamo quindi definire la funzione di Ljapunov

$$W(x,y) = -\left(H(x,y) - H(P_2) \right),$$

in modo che, comunque preso un intorno $B \subset A$ di P_2, si abbia
(1) $W(P_2) = 0$ e $W(x,y) > 0$ per ogni $(x,y) \in B \setminus \{P_2\}$,
(2) $\dot{W}(x,y) = \dot{H}(x,y) = 0$ per ogni $(x,y) \in B$.
In conclusione, possiamo applicare il teorema di Ljapunov che, sotto tali ipotesi, implica la stabilità del punto P_2.

Analogamente, notando che

$$H(0, -1/\sqrt{5}) = -\frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1}{25} - \frac{2}{5} + 1 \right) = -\frac{1 - 10 + 25}{25\sqrt{5}} < 0,$$

abbiamo che P_3 è un punto di minimo (locale) per H, e possiamo quindi applicare il teorema di Ljapunov prendendo

$$W(x,y) = H(x,y) - H(P_3)$$

come funzione di Ljapunov, e concludere che anche P_3 è un punto d'equilibrio stabile.

6.4. Analisi qualitativa. L'analisi qualitatitva è già stata iniziata al punto precedente, dove sono state studiate le traiettorie con supporto sulla curva di livello Γ_0.

Le altre traiettorie possono essere studiate nel modo seguente. Data la regolarità della funzione H le curve di livello Γ_E per E vicino a 0 rimangono vicino alla curva di livello Γ_0. Poiché le curve di livello

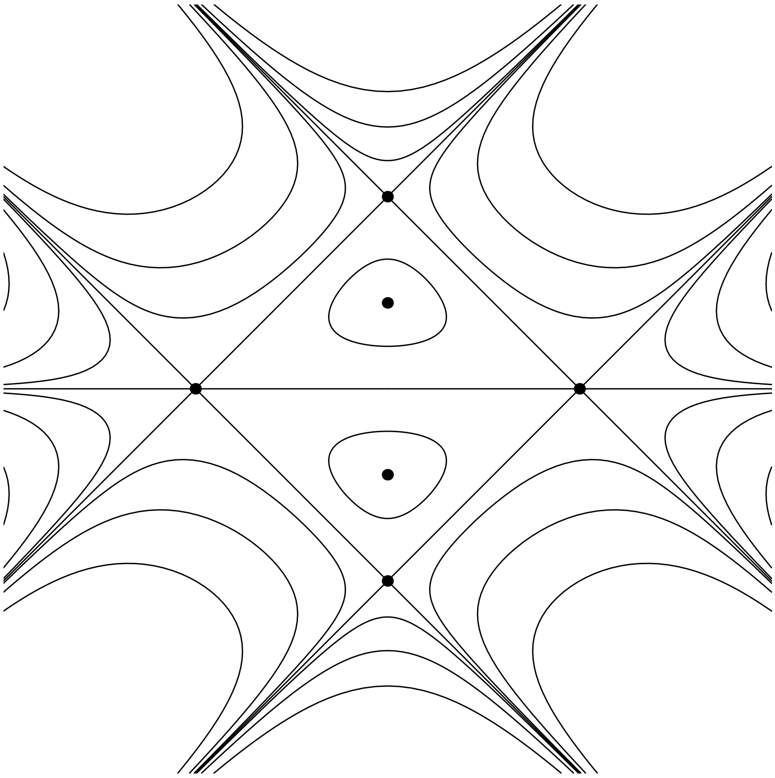

Figura 2. Curve di livello Γ_E per alcuni valori di E.

Γ_E per $E \neq 0$ non contengono punti d'equilibrio (tranne che per i valori di E tali che $E = H(0, 1/\sqrt{5})$ o $E = H(0, -1/\sqrt{5})$), allora saranno curve regolari. Man mano che ci si allontana dal valore $E = 0$ le curve saranno sempre più distanti da Γ_0, ma varieranno sempre con continuità al variare di E. Cfr. la Figura 2.

I versi di percorrenza si possono ricavare per continuità. Se E è vicino a 0, si usa la dipendenza continua dai dati iniziali per concludere che ci si muove con verso consistente con quello di percorrenza della curva di livello Γ_0. Variando ulteriormente E il verso si mantiene consistente perché per cambiare dovrebbe prima annullarsi il campo vettoriale, e questo non è possibile al di fuori dei punti d'equilibrio.

All'interno della regione A e della regione

$$A' = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1, \quad 0 \geq y \geq 1 - |x| \right\} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x, -y) \in A \right\},$$

che si ottiene da A per riflessione rispetto all'asse x, si hanno traiettorie periodiche, con orbite che contengono al loro interno uno dei due punti d'equilibrio.

Infatti sia A sia A' sono racchiuse da una componente connessa della curva di livello Γ_0 e al loro interno c'è un unico punto d'equilibrio, che è un punto d'equilibrio stabile. Allora possiamo applicare il Teorema che afferma che, sotto tali condizioni, tutte le traiettorie con dati iniziali in $\text{int}(A) \setminus P_2$ e in $\text{int}(A') \setminus P_3$ sono periodiche e hanno orbite chiuse che contenegono i punti P_2 e P_3, rispettivamente, al loro interno.

<u>ESERCIZIO 7.</u>

7.1. Stabilità dell'origine. Cerchiamo di scrivere il sistema dinamico nella forma

$$\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{\partial H}{\partial y}, \\ \dot{y} = -\dfrac{\partial H}{\partial x}, \end{cases}$$

per qualche funzione $H = H(x, y)$.

Integrando la prima equazione del sistema rispetto a y si trova

$$H(x, y) = y^2 + f(x),$$

dove $f = f(x)$ è una funzione arbitraria di x.

Integrando la seconda equazione del sistema rispetto a y si trova

$$H(x, y) = 2x^2 - x^4 + g(y),$$

dove $g = g(y)$ è una funzione arbitraria di y.

Uguagliando le due espressioni troviamo

$$H(x, y) = y^2 + 2x^2 - x^4 + c = y^2 + 2x^2 - x^4,$$

dove c è una costante arbitraria, che abbiamo posto uguale a 0. Quindi la funzione $H = H(x, y)$ è una costante del moto.

Si vede subito che $(0, 0)$ è un punto d'equilibrio per il sistema. Per dimostrarne la stabilità applichiamo il teorema di Ljapunov.

La funzione H si annulla in $(x, y) = (0, 0)$. Inoltre $(0, 0)$ è un punto stazionario poiché $\partial H/\partial x = \partial H/\partial y = 0$ in $(0, 0)$. Calcoliamo la matrice hessiana di H in $(0, 0)$.

Le derivate seconde di H sono

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} = 4 - 12x^2, \qquad \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} = 0, \qquad \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} = 2,$$

quindi la matrice hessiana in $(x, y) = (0, 0)$ vale

$$\mathcal{H} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

così che $\det \mathcal{H} = 8 > 0$ e $\mathcal{H}_{11} = 4 > 0$: quindi $(0, 0)$ è un punto di minimo per H.

Definiamo allora la funzione di Ljapunov

$$W(x, y) = H(x, y) - H(0, 0) = H(x, y).$$

Esiste quindi un intorno B di $(0, 0)$ tale che
(1) $W(0, 0) = 0$ e $W(x, y) > 0$ per ogni $(x, y) \in B \setminus \{(0, 0)\}$,
(2) $\dot{W}(x, y) = \dot{H}(x, y) = 0$ per ogni $(x, y) \in B$.
Quindi per il teorema di Ljapunov l'origine è un punto d'equilibrio stabile.

7.2. Stabilità asintotica dell'origine. Se aggiungiamo un campo vettoriale $(-\alpha x, -\alpha y)$ il sistema sarà modificato in

$$\begin{cases} \dot{x} = 2y - \alpha x, \\ \dot{y} = 4x^3 - 4x - \alpha y, \end{cases}$$

così che $(0,0)$ è ancora un punto d'equilibrio.

La matrice A del sistema linearizzato in un intorno di $(0,0)$ sarà

$$A = \begin{pmatrix} -\alpha & 2 \\ -4 & -\alpha \end{pmatrix},$$

quindi gli autovalori di A si ottengono risolvendo l'equazione

$$(-\alpha - \lambda)^2 + 8 = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \lambda = -\alpha \pm i2\sqrt{2},$$

e quindi entrambi gli autovalori hanno parte reale negativa. Quindi l'origine è un punto d'equilibrio asintoticamente stabile.

<u>Esercizio 8.</u> Siano $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ gli autovalori di A, e siano $n_1, \ldots, n_r$ le rispettive molteplicità. La soluzione del sistema $\dot{x} = Ax$ è definita globalmente (cioè per ogni $t \in \mathbb{R}$) si può scrivere nella forma

$$x(t) = \sum_{k=1}^{r} \mathrm{e}^{\lambda_k t} P^{(k)}(t),$$

dove $P^{(k)}(t)$ è un polinomio di grado $n_k - 1$ in t (che dipende dai dati iniziali). Poiché per ipotesi $\mathrm{Re}\,\lambda_k < 0$ per ogni $k = 1, \ldots, r$ si ha

$$\lim_{t\to\infty} \mathrm{e}^{\lambda_k t} P^{(k)}(t) = 0, \qquad k = 1, \ldots, r,$$

e quindi

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$$

indipendentemente dal dato iniziale. Quindi, quale che sia il dato iniziale $\bar{x}$, la soluzione $x(t) = \varphi(t, \bar{x})$ tende a 0 per $t \to \infty$. Ne segue che $x = 0$ è un punto d'equilibrio stabile e attrattivo, e quindi è un punto d'equilibrio asintoticamente stabile.
