Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2006/2007

FM1 - Equazioni differenziali e meccanica

Seconda prova d'esonero (04-06-2007)

<u>Esercizio 1.</u> [4] Si consideri il sistema dinamico descritto dall'equazione $\dot{x} = f(x)$ in $\mathbb{R}^n$. Sia x_0 un punto in $\mathbb{R}^n$ tale che $f(x_0) \neq 0$ e sia π il piano perpendicolare a $f(x_0)$ in x_0: $\pi = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, f(x_0)\rangle = 0\}$.
(1.1) Dimostrare che esiste un intorno $B(x_0)$ del punto x_0 tale che per ogni $x \in B(x_0)$ la traiettoria con dato iniziale x raggiunge il piano π in un tempo finito $\tau(x)$.
(1.2) Dimostrare che $x \to \tau(x)$ non è identicamente costante in x.

<u>Esercizio 2.</u> [14] Dato un sistema di riferimento $\kappa = Oxyz$ (sistema assoluto), si consideri un sistema di riferimento mobile $K = O'\xi\eta\zeta$ (sistema relativo), la cui origine O' si muova nel piano (x, y) lungo il profilo $y(x) = x^2$ in modo tale che la sua componente lungo l'asse x vari secondo la legge $x_{O'}(t) = \sin t$. L'asse ζ di K si mantiene sempre parallelo all'asse z di κ, mentre l'asse ξ si mantiene sempre tangente alla curva $y = y(x)$. Un punto materiale P di massa $m = 1$ si muove lungo l'asse ξ con legge oraria $\xi(t) = t$.
(2.1) Scrivere la trasformazione rigida $D\colon K \to \kappa$ come composizione di una traslazione C con una rotazione B, *i.e.* $D = C \circ B$, e determinare C e B.
(2.2) Scrivere la soluzione delle equazioni del moto $\mathbf{q}(t)$ nel sistema assoluto e $\mathbf{Q}(t)$ nel sistema mobile.
(2.3) Determinare la velocità assoluta $\mathbf{v}$.
(2.4) Determinare la velocità relativa $\mathbf{v}'$.
(2.5) Determinare la componente traslatoria della velocità di trascinamento $\mathbf{v}_0$.
(2.6) Determinare la componente rotatoria della velocità di trascinamento $\mathbf{v}_T$.
(2.7) Determinare la forza di Coriolis che agisce sul punto P.
(2.8) Determinare la forza centrifuga che agisce sul punto P.
(2.9) Dimostrare che la traiettoria $t \to \mathbf{q}(t)$ attraversa l'asse x infinite volte, e calcolare esplicitamente i tempi di attraversamento. [*Suggerimento.* Si ha $\sin x = \tan x/\sqrt{1 + \tan^2 x}$ per $|x| < \pi/2$.]

<u>Esercizio 3.</u> [5] Si definisca la velocità areolare per un punto materiale che si muova lungo un'orbita piana chiusa. Si dimostri che, se il punto materiale si muove sotto l'azione di una forza centrale gravitazionale, la velocità areolare si conserva.

<u>Esercizio 4.</u> [4] Si dimostri che, nel problema dei due corpi, il sistema si disaccoppia in due sistemi indipendenti a tre gradi di libertà ciascuno.

<u>Esercizio 5.</u> [14] Si consideri un punto materiale di massa μ soggetto a una forza centrale di energia potenziale
$$V(\rho) = 2\log\rho - \frac{1}{2}\log\left(1 + 2\rho^2 + 2\rho^4\right).$$
Si assuma che il momento angolare L del sistema sia diverso da zero. Al variare di L si risponda alle seguenti domande.
(5.1) Si scriva l'equazione del moto per la variabile ρ e il sistema dinamico associato.
(5.2) Si determinino i punti d'equilibrio.
(5.3) Si discuta la stabilità dei punti d'equilibrio.
(5.4) Si disegni il grafico del potenziale efficace.
(5.5) Si analizzino qualitativamente le orbite nel piano $(\rho, \dot{\rho})$.
(5.6) Si determinino le traiettorie periodiche nel piano $(\rho, \dot{\rho})$.
(5.7) Si discutano le condizioni sotto le quali il moto complessivo del sistema è periodico.
(5.8) Si discuta come cambia lo scenario per $L = 0$.

<u>Esercizio 6.</u> [5] Si dimostri che in generale la configurazione di un sistema rigido si può individuare attraverso sei parametri indipendenti. Sotto quali condizioni cinque parametri sono sufficienti?