Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2006/2007

FM1 - Equazioni differenziali e meccanica

Seconda prova d'esonero (04-06-2006)

CORREZIONE

Esercizio 1. Cfr. Cap. 4, §19, inizio del paragrafo 19.3, pagg. 152–154.

Esercizio 2.

2.1. Trasformazione rigida. L'origine O' del sistema di riferimento mobile oscilla lungo la parabola $y = y(x) = x^2$ con legge $x_{O'}(t) = \sin t$. Quindi $y_{O'}(t) = \sin^2 t$ e il vettore $\mathbf{r}$ che individua O' nel sistema di riferimento fisso è dato da

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = \big(\sin t, \sin^2 t, 0\big) .$$

L'angolo $\theta(t)$ che l'asse ξ del sistema mobile forma con l'asse x del sistema fisso è tale che

$$\tan\theta(t) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(x_{O'}(t)) = 2\sin t,$$

quindi C è la traslazione di $\mathbf{r}$ e B è la rotazione di $\theta(t)$ intorno all'asse z, i.e.

$$B = B(t) = \begin{pmatrix} \cos\theta(t) & -\sin\theta(t) & 0 \\ \sin\theta(t) & \cos\theta(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

con $\theta(t) = \arctan 2\sin t$.

2.2. Soluzione dell'equazione del moto. Nel sistema mobile si ha

$$\mathbf{Q}(t) = (t, 0, 0) ,$$

per ipotesi. Quindi nel sistema fisso

$$\mathbf{q}(t) = B(t)\mathbf{Q}(t) + \mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} \cos\theta(t) & -\sin\theta(t) & 0 \\ \sin\theta(t) & \cos\theta(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sin t \\ \sin^2 t \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t\cos\theta(t) + \sin t \\ t\sin\theta(t) + \sin^2 t \\ 0 \end{pmatrix} ,$$

quindi

$$\mathbf{q}(t) = \big(t\cos\theta(t) + \sin t, t\sin\theta(t) + \sin^2 t, 0\big) .$$

2.3. Velocità assoluta. Si ha

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{q}} = \Big(\cos\theta(t) - t\sin\theta(t)\dot\theta(t) + \cos t, \sin\theta(t) + t\cos\theta(t)\dot\theta(t) + 2\sin t\cos t, 0\Big) ,$$

dove

$$\dot\theta(t) = \frac{2\cos t}{1 + 4\sin^2 t}.$$

2.4. Velocità relativa. Si ha

$$\mathbf{v}' = B(t)\dot{\mathbf{Q}}(t) = (\cos\theta(t), \sin\theta(t), 0)\,,$$

poiché $\dot{\mathbf{Q}}(t) = (1, 0, 0)$.

2.5. Componente traslatoria della velocità di trascinamento. Si ha

$$\mathbf{v}_0 = \dot{\mathbf{r}}(t) = (\cos t, 2\sin t\cos t, 0)\,.$$

2.6. Componente rotatoria della velocità di trascinamento. Si ha

$$\mathbf{v}_T = [\boldsymbol{\omega}(t), \mathbf{q}(t) - \mathbf{r}(t)] = \det\begin{pmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ 0 & 0 & \dot{\theta}(t) \\ t\cos\theta(t) & t\sin\theta(t) & 0 \end{pmatrix} = \Big(-t\sin\theta(t)\dot{\theta}(t), t\cos\theta(t)\dot{\theta}(t), 0\Big)\,,$$

ed è immediato verificare che $\mathbf{v}' + \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_T = \mathbf{v}$.

2.7. Forza di Coriolis. Dalla definizione di forza di Coriolis si ha

$$\mathbf{F}_{\rm Cor} = -2m[\boldsymbol{\Omega}, \dot{\mathbf{Q}}] = -2\det\begin{pmatrix} \mathbf{e}_\xi & \mathbf{e}_\eta & \mathbf{e}_\zeta \\ 0 & 0 & \dot{\theta}(t) \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \Big(0, -2\dot{\theta}(t), 0\Big)\,,$$

dove si è usato che $m = 1$.

2.8. Forza centrifuga. Si ha

$$[\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{Q}] = \det\begin{pmatrix} \mathbf{e}_\xi & \mathbf{e}_\eta & \mathbf{e}_\zeta \\ 0 & 0 & \dot{\theta}(t) \\ t & 0 & 0 \end{pmatrix} = \Big(0, t\dot{\theta}(t), 0\Big)\,,$$

e quindi dalla definizione di forza centrifuga

$$\mathbf{F}_{\rm cf} = -m[\boldsymbol{\Omega}, [\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{Q}]] = -\det\begin{pmatrix} \mathbf{e}_\xi & \mathbf{e}_\eta & \mathbf{e}_\zeta \\ 0 & 0 & \dot{\theta}(t) \\ 0 & t\dot{\theta}(t) & 0 \end{pmatrix} = \Big(t\dot{\theta}^2(t), 0, 0\Big)\,.$$

2.9. Tempi di attraversamento. La traiettoria $t \to \mathbf{q}(t) = (x(t), y(t), 0)$ attraversa l'asse x per t tale che $y(t) = 0$. Si ha

$$y(t) = t\sin\theta(t) + \sin^2 t, \qquad \sin\theta(t) = \frac{\tan\theta(t)}{\sqrt{1 + \tan^2\theta(t)}} = \frac{2\sin t}{\sqrt{1 + 4\sin^2(t)}},$$

quindi $y(t) = 0$ diventa

$$\sin t\left(\frac{2t}{\sqrt{1 + 4\sin^2 t}} + \sin t\right) = 0.$$

Poiché $1 \leq 1 + 4\sin^2(t) \leq 5$, e quindi

$$\frac{2t}{\sqrt{5}} \leq \frac{2t}{\sqrt{1 + 4\sin^2 t}} \leq 2t,$$

mentre $|\sin t| \leq 1$, la funzione

$$\frac{2t}{\sqrt{1+4\sin^2 t}} + \sin t$$

non si annulla mai, e quindi $y(t) = 0$ se e solo se $\sin t = 0$. La funzione $\sin t$ si annulla infinite volte, ogni qual volta si abbia $t = t_k = \pi k$, con $k \in \mathbb{Z}$. Quindi i tempi di attraversamento sono dati dai tempi della successione $\{t_k\}$.

ESERCIZIO 3. Cfr. Cap. 7, §31, paragrafi 31.16 ed esercizio 5.

ESERCIZIO 4. Cfr. Cap. 7, §30, lemma 30.4 e paragrafi 30.3 e 30.5.

ESERCIZIO 5.

5.1. Equazione del moto e sistema dinamico associato. Si ha

$$\begin{aligned} V_{\text{eff}}(\rho) &= V(\rho) + \frac{L^2}{\mu\rho^2} = 2\log\rho - \frac{1}{2}\log\left(1+2\rho^2+2\rho^4\right) + \frac{\beta}{2\rho^2}, \\ V'_{\text{eff}}(\rho) &= \frac{2}{\rho} - \frac{2\rho+4\rho^3}{1+2\rho^2+2\rho^4} - \frac{\beta}{\rho^3} = \frac{2\rho^2(1+2\rho^2+2\rho^4) - \rho^3(2\rho+4\rho^3) - \beta(1+2\rho^2+2\rho^4)}{\rho^3(1+2\rho^2+2\rho^4)} \\ &= \frac{2\rho^2+4\rho^4+4\rho^6-2\rho^4-4\rho^6-\beta-2\beta\rho^2-2\beta\rho^4}{\rho^3(1+2\rho^2+\rho^4)} = \frac{2(1-\beta)\rho^4+2(1-\beta)\rho^2-\beta}{\rho^3(1+2\rho^2+2\rho^4)}, \end{aligned}$$

dove $\beta = L^2/\mu \in \mathbb{R}_+$. Poiché per ipotesi $L \neq 0$ nel seguito si deve considerare solo $\beta > 0$.

L'equazione del moto per la variabile radiale è allora

$$\mu\ddot{\rho} = -V'_{\text{eff}}(\rho) = -\frac{2}{\rho} + \frac{2\rho+4\rho^3}{1+2\rho^2+2\rho^4} + \frac{\beta}{\rho^3},$$

e il sistema dinamico associato è

$$\begin{cases} \dot{\rho} = y, \\ \dot{y} = -\dfrac{1}{\mu}V'_{\text{eff}}(\rho) = \dfrac{1}{\mu}\left(-\dfrac{2}{\rho} + \dfrac{2\rho+4\rho^3}{1+2\rho^2+2\rho^4} + \dfrac{\beta}{\rho^3}\right). \end{cases}$$

5.2. Punti d'equilibrio. I punti d'equilibrio sono della forma $(\rho, y) = (\rho_0, 0)$ con $V'_{\text{eff}}(\rho_0) = 0$.

La funzione $V_{\text{eff}}(\rho)$ è definita per $\rho > 0$, e si ha

$$\lim_{\rho\to 0} V_{\text{eff}}(\rho) = +\infty, \qquad \lim_{\rho\to\infty} V_{\text{eff}}(\rho) = -\log\sqrt{2},$$

poiché per $\rho \to 0$ il termine dominante è $\beta/2\rho^2$, che diverge per $\beta > 0$, mentre per $\rho \to \infty$ si ha

$$\begin{aligned} \lim_{\rho\to\infty} V_{\text{eff}}(\rho) &= \lim_{\rho\to\infty}\left(2\log\rho - \frac{1}{2}\log\left(1+2\rho^2+2\rho^4\right)\right) = -\frac{1}{2}\lim_{\rho\to\infty}\log\left(\frac{1+2\rho^2+2\rho^4}{\rho^4}\right) \\ &= -\frac{1}{2}\lim_{\rho\to\infty}\log\left(2+\frac{2}{\rho^2}+\frac{1}{\rho^4}\right) = -\frac{1}{2}\log 2 = -\log\sqrt{2}, \end{aligned}$$

dove si è usato che $2\log\rho = (1/2)4\log\rho = (1/2)\log\rho^4 = -(1/2)\log(1/\rho^4)$ e che $\log a + \log b = \log(ab)$.

Si ha $V'_{\text{eff}}(\rho) = 0$ per

$$2(1-\beta)\rho^4 + 2(1-\beta)\rho^2 - \beta = 0.$$

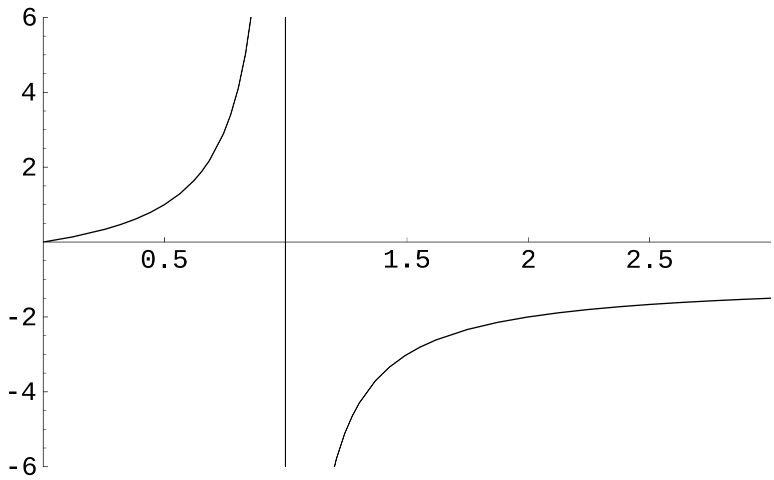

Figura 1. Grafico della funaione $\alpha = \beta/(1-\beta)$ per $\beta > 0$.

Se $\beta = 1$ l'equazione si riduce a $-\beta = 0$ che non ammette soluzioni. Se $\beta \neq 1$ possiamo dividere per $1-\beta$ così da ottenere

$$2\rho^4 + 2\rho^2 - \alpha = 0, \qquad \alpha = \frac{\beta}{1-\beta}.$$

La funzione $\beta \to \alpha = \beta/(\beta-1)$ è crescente in β (poiché $\mathrm{d}\alpha/\mathrm{d}\beta = 1/(1-\beta)^2 > 0$), e si ha $\alpha \in (0,\infty)$ per $\beta \in (0,1)$ e $\alpha \in (-\infty,-1)$ per $\beta \in (1,\infty)$; cfr. la Figura 1.

Dobbiamo quindi risolvere l'equazione di secondo grado in $x = \rho^2$ data da

$$2x^2 + 2x - \alpha = 0, \qquad \alpha \in (-\infty,-1) \cup (0,+\infty),$$

e considerarne solo le radici positive. Le radici sono

$$x = \frac{1}{2}\left(-1 \pm \sqrt{1+2\alpha}\right).$$

Per $\alpha < -1$ l'argomento della radice è sempre negativo. Per $\alpha > 0$ esiste sempre una sola radice positiva, poiché $1 + 2\alpha > 1$, ed è data da

$$x_0 = \frac{1}{2}\left(-1 + \frac{1}{2}\sqrt{1+2\alpha}\right).$$

Quindi per avere radici positive deve essere $0 < \beta < 1$.

In conclusione si hanno punti d'equilibrio se e solo se $0 < \beta < 1$. In tal caso esiste un unico punto d'equilibrio, dato da

$$\rho_0 = \sqrt{\frac{1}{2}\left(-1 + \sqrt{1+2\alpha}\right)} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(-1 + \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}\right)}.$$

5.3. Stabilità dei punti d'equilibrio. Per $\beta \in (0,1)$ il punto stazionario ρ_0 è un punto di minimo (isolato) per l'energia potenziale efficace $V_{\text{eff}}(\rho)$.

Il modo più rapido per vederlo è notare che il segno della derivata $V'_{\text{eff}}(\rho)$ è uguale al segno del polinomio $2x^2 + 2x - \alpha$ dove $x = \rho^2$. Quindi $V'_{\text{eff}}(\rho) = 0$ per $x = x_0$, $V'_{\text{eff}}(\rho) > 0$ per $x > x_0$ e $V'_{\text{eff}}(\rho) < 0$ per $0 < x < x_0$. Di conseguenza la funzione $V_{\text{eff}}(\rho)$ è crescente per $\rho > \rho_0$ e decrescente per $0 < \rho < \rho_0$: quindi $\rho = \rho_0$ è un punto di minimo isolato.

Possiamo quindi applicare il teorema di Dirichlet per concludere che $(\rho_0, 0)$ è un punto d'equilibrio stabile per il sistema dinamico associato.

5.4. Grafico dell'energia potenziale efficace. Per $\beta \geq 1$ la funzione $V_{\text{eff}}(\rho)$ ha derivata che non si annulla mai. Per $\rho \to 0$ la funzione $V'_{\text{eff}}(\rho)$ tende a $-\infty$, quindi $V_{\text{eff}}(\rho)$ è strettamente decrescente: per $\rho \to 0$ l'energia potenziale efficace tende all'infinito e per $\rho \to \infty$ tende all'asintoto orizzontale $-\log\sqrt{2}$. Quindi il grafico della funzione è come rappresentato in Figura 2.

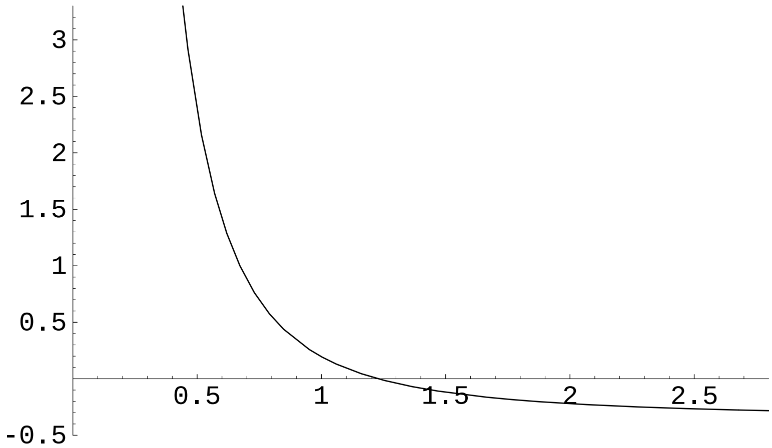

Figura 2. Grafico dell'energia potenziale $V(\rho)$ per $\beta \geq 1$.

Per $\beta \in (0, 1)$ la funzione $V_{\text{eff}}(\rho)$ ha un punto di minimo in $\rho = \rho_0$, va all'infinito per $\rho \to 0$ e ha un asintoto orizzontale $-\log\sqrt{2}$ per $\rho \to \infty$; cfr. la Figura 3.

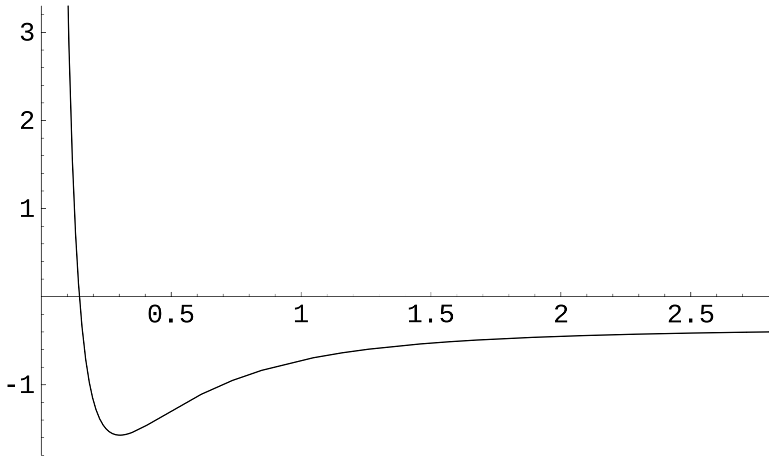

Figura 3. Grafico dell'energia potenziale $V(\rho)$ per $0 < \beta < 1$.

5.5. Analisi qualitativa. Studiamo le curve di livello

$$\Gamma_E = \left\{ (\rho, y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} : \frac{1}{2}\mu y^2 + V_{\text{eff}}(\rho) = E \right\}$$

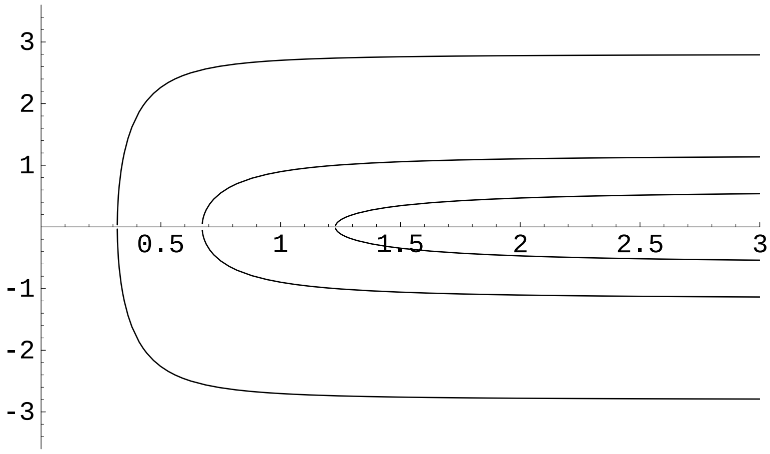

Figura 4. Piano delle fasi $(\rho, y) = (\rho, \dot{\rho})$ per $\beta \geq 1$.

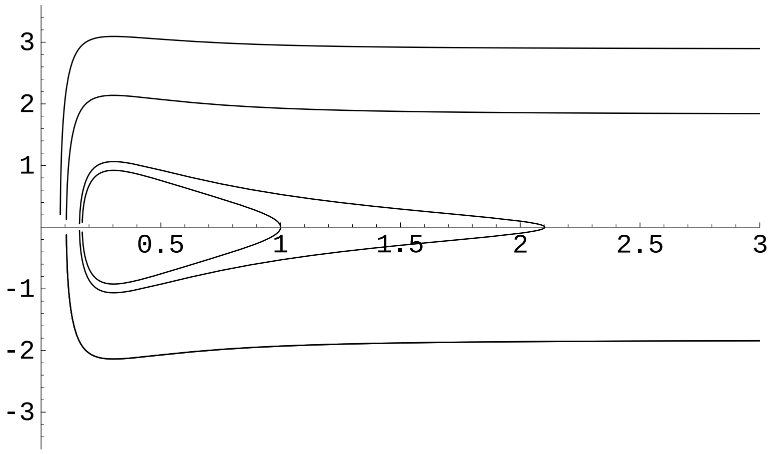

Figura 5. Piano delle fasi $(\rho, y) = (\rho, \dot{\rho})$ per $0 < \beta < 1$.

dell'energia del sistema. Per $\beta \geq 1$ si ha la situazione rappresentata in Figura 4, per $\beta \in (0, 1)$ si ha la situazione rappresentata in Figura 5.

5.6. Traiettorie periodiche nel piano $(\rho, \dot{\rho})$. Si possono avere traiettorie periodiche solo per $\beta \in (0, 1)$. In tal caso l'energia E deve essere tale che $V_{\rm eff}(\rho_0) < E < -\log\sqrt{2}$. Quindi si deve fissare il dato iniziale $(\bar{\rho}, \bar{y})$ in modo tale che si abbia

$$V_{\rm eff}(\rho_0) < \frac{1}{2}\mu\bar{y}^2 + V_{\rm eff}(\bar{\rho}) < -\log\sqrt{2}.$$

5.7. Traiettorie periodiche per il moto complessivo. Si possono avere moti periodici solo per $\beta \in (0, 1)$. In tal caso si hanno due possibilità. La prima è che sia $(\rho(0), \dot{\rho}(0)) = (\rho_0, 0)$, ovvero che la varabile radiale sia ferma nel suo punto d'equilibrio: in tal caso risulta $\dot{\theta} = L/\mu\rho_0^2$, e quindi il punto materiale si muove lungo un'orbita circolare con velocità angolare costante (e quindi si muove di moto circolare uniforme). La seconda è che $(\rho(0), \dot\rho(0)) = (\bar\rho, \bar y)$, in modo tale che la condizione al punto 5.6 sia soddisfatta, e che l'incremento della variabile angolare in un periodo T_0 della variabile radiale sia commensurabile con 2π: questo significa che si deve avere

$$2\int_{\rho_-(E)}^{\rho_+(E)} \frac{\mathrm{d}\rho^2}{\rho\sqrt{\dfrac{2\mu}{L^2}\left(E - V_{\rm eff}(\rho)\right)}} = 2\pi\frac{p}{q}$$

per $p, q \in \mathbb{N}$ primi tra loro, dove $\rho_\pm(E)$ sono le due radici dell'equazione $V_{\rm eff}(\rho) = E$.

5.8. Caso $\beta = 0$. Se $\beta = 0$ si ha

$$\begin{aligned} V_{\rm eff}(\rho) &= V(\rho) = 2\log\rho - \frac{1}{2}\log\left(1 + 2\rho^2 + 2\rho^4\right), \\ V'_{\rm eff}(\rho) &= \frac{2}{\rho} - \frac{2\rho + 4\rho^3}{1 + 2\rho^2 + 2\rho^4} = \frac{2\rho^2(1 + 2\rho^2 + 2\rho^4) - \rho^3(2\rho + 4\rho^3)}{\rho^3(1 + 2\rho^2 + 2\rho^4)} \\ &= \frac{2\rho^2 + 4\rho^4 + 4\rho^6 - 2\rho^4 - 4\rho^6}{\rho^3(1 + 2\rho^2 + \rho^4)} = \frac{2\rho^4 + 2\rho^2}{\rho^3(1 + 2\rho^2 + 2\rho^4)} = \frac{2(\rho^2 + 1)}{\rho(1 + 2\rho^2 + 2\rho^4)}, \end{aligned}$$

quindi $V'_{\rm eff}(\rho) > 0$. Inoltre si ha

$$\lim_{\rho\to 0} V_{\rm eff}(\rho) = -\infty,$$

poiché per $\beta = 0$ il termine dominante diventa $2\log\rho$. Per $\rho \to \infty$ si ha sempre un asintoto orizzontale a $-\log\sqrt{2}$. Quindi in tal caso la funzione $V_{\rm eff}(\rho)$ è strettamente crescente (cfr. la Figura 6).

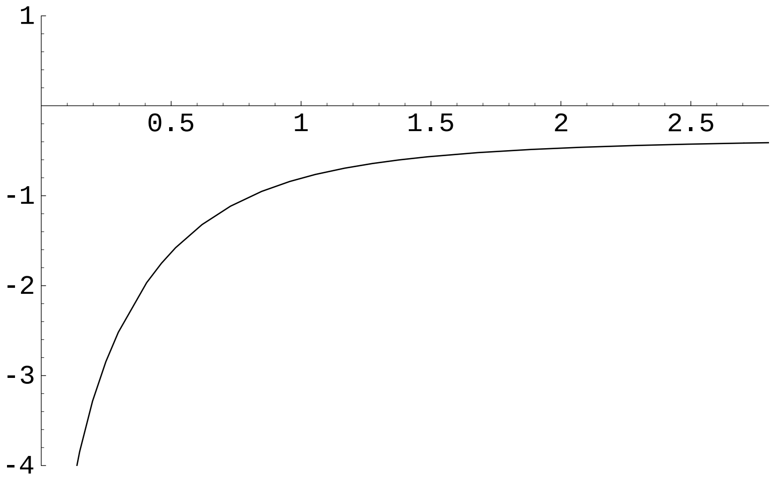

Figura 6. Grafico dell'energia potenziale $V(\rho)$ per $\beta = 0$.

Nel piano $(\rho, \dot\rho)$ si ha la situazione rappresentata in Figura 7. In particolare non esistono punti d'equilibrio né traiettorie periodiche nel piano $\rho, \dot\rho)$, e quindi *a fortiori* non esistono moti periodici per il moto complessivo.

<u>Esercizio 7.</u> Cfr. Cap. 10, §42, teorema 42.25 e paragrafo 42.26.

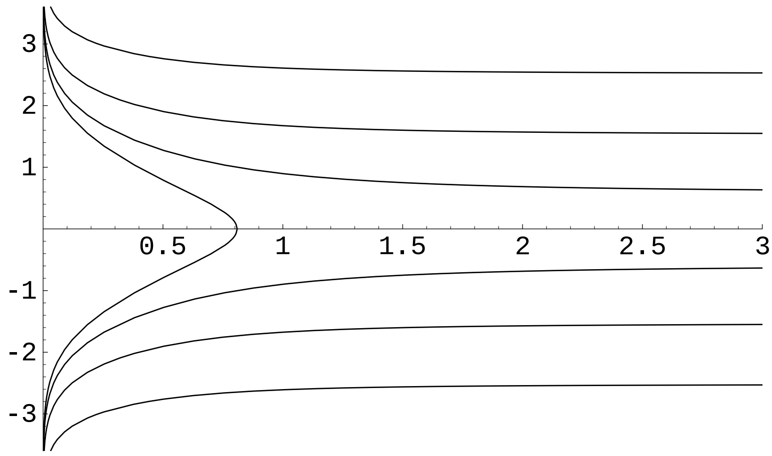

Figura 7. Piano delle fasi $(\rho, y) = (\rho, \dot{\rho})$ per $\beta = 0$.