Corso di laurea in Matematica

Sistemi dinamici – Primo Modulo

Recupero della I Prova d'esonero 06-02-99

Si consideri il sistema dinamico planare

$$\begin{cases} \dot{x} = 2y - 2x\left(x^2 - 1\right), \\ \dot{y} = 2y\left(3x^2 - 1\right). \end{cases}$$

(1) Verificare che esiste una costante del moto $H(x, y)$ e determinarla.

(2) Individuare i punti critici e discuterne la stabilità.

(3) Tracciare le curve di livello nello spazio delle fasi e discuterne qualitativamente la forma.

(4) Individuare i dati iniziali che dànno origine a traiettorie periodiche.

(5) Trovare esplicitamente la soluzione $(x(t), y(t))$ con dati iniziali $(\bar{x}, \bar{y}) = (\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$ e discuterne il comportamento asintotico per $t \to \pm\infty$.

(6) Rispondere a scelta a una delle tre seguenti domande:

(6.1) Dimostrare che la traiettoria con dato iniziale $(\bar{x}, \bar{y}) = (1/3, -8/27)$ è periodica e scriverne il periodo come integrale definito.
[Suggerimento: ricavando y come funzione di x, dall'equazione implicita $H(x, y) = E$, si trovano due determinazioni $y = y_{\pm}(x)$, con $x_1 \leq x \leq x_2$, che si raccordano in x_1 e in x_2. Si può quindi scrivere il periodo come somma dei tempi di percorrenza dei due archi di curva $x \in [x_1, x_2] \to y_{\pm}(x)$.]

(6.2) Se si aggiunge un campo vettoriale $(-\alpha x, -\alpha y)$, con $\alpha > 0$, determinare quale è il valore α_0 tale che per $\alpha > \alpha_0$ l'origine è un punto asintoticamente stabile e il cerchio $x^2 + y^2 \leq 1$ è contenuto nel suo bacino d'attrazione.

(6.3) Dimostrare che la traiettoria con dati iniziali $(\bar{x}, \bar{y}) = (0, 2)$ diverge e dire se questo avviene in un tempo finito o infinito.