Corso di laurea in Matematica

Sistemi dinamici – Primo Modulo

Recupero per la II Prova d'esonero / Prova d'esame 06-02-99

Un sistema meccanico è costituito da quattro punti materiali P_1, P_2, P_3 e P_4, tutti di massa m, disposti in corrispondenza dei quattro vertici di un quadrato di lato $\ell = 1$.

Il quadrato è vincolato a muoversi in un piano verticale π.

(1) Nel caso in cui il quadrato sia libero di muoversi nel piano sottoposto alla sola forza peso (sia g la costante di gravità), scrivere la lagrangiana del sistema e le corrispondenti equazioni di Eulero-Lagrange. Discutere l'esistenza di eventuali posizioni d'equilibrio.

(2) Nel caso in cui il punto P_1 sia fissato a un punto O e il piano π ruoti intorno alla verticale passante per O con velocità angolare ω, scrivere la lagrangiana del sistema e le corrispondenti equazioni di Eulero-Lagrange. [Suggerimento: si consideri come coordinata lagrangiana l'angolo che il lato che connette P_1 con il punto P_2 (consecutivo sul quadrato) forma con la verticale discendente.]

(3) Nel caso del punto (2), determinare le posizioni d'equilibrio e discuterne la stabilità.
[Osservazione: si ricorda

$$\cos\theta + \sin\theta = \sqrt{2}\cos(\theta - \pi/4),$$

come è facile verificare.]

(4) Sempre nel caso in cui il punto P_1 sia fisso in O e il piano ruoti intorno alla verticale per O con velocità angolare costante ω, si immagini ora che i punti P_2 e P_4 (connessi a P_1 da due lati del quadrato) siano collegati tramite una molla di lunghezza a riposo nulla e massa trascurabile a un punto P_0, anch'esso di massa m, vincolato a muoversi lungo la verticale passante per P_1. Scrivere la lagrangiana e le corrispondenti equazioni di Eulero-Lagrange per il sistema così modificato.
[Suggerimento: si considerino come coordinata lagrangiana l'angolo che il lato che connette P_1 con il punto P_2 (consecutivo sul quadrato) forma con la verticale discendente e l'ordinata del punto P_0.]

(5) Rispondere a una delle due seguenti domande, come indicato.

(5.1) [Esonero.] Nel caso del punto (4) si verifichi che, per valori dei parametri $k = g = \omega = 1$, la posizione (Q_1), definita da

$$\theta = \frac{\pi}{4}\,, \qquad y = -\frac{mg}{2k} - \frac{1}{\sqrt{2}}\,,$$

è una posizione d'equilibrio stabile. Determinare le reazioni vincolari che agiscono sul punto P_0, in corrispondenza di tale posizione d'equilibrio.

(5.2) [Esame.] Nel caso del punto (2) discutere qualitativamente il moto nello spazio $(\theta, y) = (\theta, \dot{\theta})$, a seconda dei valori dei parametri. In particolare determinare i dati iniziali che dànno luogo a traiettorie periodiche.