Corso di laurea in Matematica

Sistemi dinamici – Primo Modulo

Recupero della II Prova d'esonero / Prova d'esame 06-02-99

CORREZIONE

---

(1) Se il sistema è libero, possiamo scrivere l'energia cinetica, utilizzando il Teorema di König, nella forma

$$T = \frac{1}{2}(4m)\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) + \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 ,$$

dove (x, y) sono le coordinate del centro d'inerzia C, che si troverà al centro del quadrato (*i.e.* all'intersezione delle due diagonali principali) e I è il momento d'inerzia dei 4 punti rispetto a un asse ortogonale al piano π passante per il centro d'inerzia; θ è un angolo che indica rotazione intorno a tale asse.

Si verifica immediatamente che

$$I = 4m\left(\frac{\ell}{\sqrt{2}}\right)^2 = 2m\ell^2 = 2m ,$$

così che

$$T = 2m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) + m\dot{\theta}^2 .$$

L'energia potenziale è semplicemente

$$U = (4m)\, gy ,$$

così che la lagrangiana che descrive il sistema è data da

$$\mathcal{L} = T - U = 2m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) + m\dot{\theta}^2 - 4mgy$$

e le equazioni di Eulero-Lagrange sono

$$\begin{aligned} &4m\ddot{x} = 0 , \\ &4m\ddot{y} = -4mg , \\ &2m\ddot{\theta} = 0 . \end{aligned}$$

Ovviamente non esistono posizioni d'equilibrio dal momento che il potenziale non ammette punti stazionari.

Corretto, ancorché inutilmente complicato, è anche il seguente procedimento. Se indichiamo con (x_1, y_1) le coordinate del punto P_1, si ha

$$\begin{aligned} &P_1 = (x_1, y_1) , \qquad P_2 = (x_1 + \sin\theta, y_1 - \cos\theta) , \\ &P_3 = (x_1 + \sin\theta - \cos\theta, y_1 - \cos\theta - \sin\theta) , \qquad P_4 = (x_1 - \cos\theta, y_1 - \sin\theta) , \end{aligned}$$

Si trova allora

$$T = \frac{1}{2}m\sum_{i=1}^{4}\mathbf{v}_i^2 = 2m\left[\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 + \dot{\theta}^2 + \dot{\theta}\dot{x}_1\left(\sin\theta + \cos\theta\right) + \dot{\theta}\dot{y}_1\left(\sin\theta - \cos\theta\right)\right] ,$$

se $\mathbf{v}_i$ è la velocità del punto P_i, con $i = 1, \ldots, 4$.

L'energia potenziale è

$$mg\left(4y_1 - 2\sin\theta - 2\cos\theta\right) ,$$

così che la lagrangiana risulta essere

$$\mathcal{L} = T - U = 2m\left[\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 + \dot{\theta}^2 + \dot{\theta}\dot{x}_1(\sin\theta + \cos\theta) + \dot{\theta}\dot{y}_1(\sin\theta - \cos\theta)\right] - mg\,(4y_1 - 2\sin\theta - 2\cos\theta)$$

e le equazioni di Eulero-Lagrange sono

$$\begin{cases} 4m\ddot{x}_1 + 2m\ddot{\theta}\,(\sin\theta + \cos\theta) + 2m\dot{\theta}^2\,(\cos\theta - \sin\theta) = 0\ , \\ 4m\ddot{y}_1 + 2m\ddot{\theta}\,(\sin\theta - \cos\theta) + 2m\dot{\theta}^2\,(\cos\theta + \sin\theta) = -4mg\ , \\ 4m\ddot{\theta} + 2m\ddot{x}_1\,(\cos\theta + \sin\theta) + 2m\ddot{y}_1\,(\sin\theta - \cos\theta) = 2m\,(\cos\theta - \sin\theta)\ . \end{cases}$$

È immediato verificare che le due lagrangiane sono equivalenti, notando che

$$\begin{aligned} x &= x_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin(\theta - \pi/4) = x_1 + \frac{1}{2}(\sin\theta - \cos\theta)\ , \\ y &= y_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\cos(\theta - \pi/4) = x_1 - \frac{1}{2}(\sin\theta + \cos\theta)\ , \end{aligned}$$

se $C = (x, y)$ e $P_1 = (x_1, y_1)$.

---

(2) Se il punto P_1 è fisso in O, si scelga un sistema di coordinate (x, y) sul piano π tale che $O = (0, 0)$ e l'asse y sia la verticale passante per O. Le coordinate cartesiane dei punti P_1, P_2, P_3 e P_4 sono allora date da

$$P_1 = (0,0)\ , \qquad P_2 = (\sin\theta, -\cos\theta)\ , \qquad P_3 = (\sin\theta - \cos\theta, -\cos\theta - \sin\theta)\ , \qquad P_4 = (-\cos\theta, -\sin\theta)\ .$$

Le corrispondenti velocità sono quindi

$$\mathbf{v}_1 = (0,0)\ , \qquad \mathbf{v}_2 = (\cos\theta\dot{\theta}, \sin\theta\dot{\theta})\ , \qquad \mathbf{v}_3 = (\cos\theta\dot{\theta} + \sin\theta\dot{\theta}, \sin\theta\dot{\theta} - \cos\theta\dot{\theta})\ , \qquad \mathbf{v}_4 = (\sin\theta\dot{\theta}, -\cos\theta\dot{\theta})\ .$$

L'energia cinetica del sistema è

$$T = \frac{1}{2}m\dot{\theta}^2 + m\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m\dot{\theta}^2 = 2m\dot{\theta}^2$$

e l'energia potenziale è

$$\begin{aligned} U &= -2mg\,(\cos\theta + \sin\theta) + m\omega^2\sin\theta\cos\theta \\ &= -2mg\,(\cos\theta + \sin\theta) + \frac{1}{2}m\omega^2\sin 2\theta\ . \end{aligned}$$

avendo trascurato i termini costanti.

Quindi la lagrangiana del sistema è data da

$$\mathcal{L} = T - U = 2m\dot{\theta}^2 + 2mg\,(\cos\theta + \sin\theta) - m\omega^2\sin\theta\cos\theta$$

e la corrispondente equazione di Eulero-Lagrange è

$$\begin{aligned} 4m\ddot{\theta} &= 2mg\,(\cos\theta - \sin\theta) - m\omega^2\cos 2\theta \\ &= 2mg\,(\cos\theta - \sin\theta) - m\omega^2\left(\cos^2\theta - \sin^2\theta\right)\ . \end{aligned}$$

---

(3) I punti d'equilibrio sono i punti stazionari del potenziale. Si ha

$$\begin{aligned} \frac{dU}{d\theta} &= -2mg\,(\cos\theta - \sin\theta) + m\omega^2\cos 2\theta \\ &= -2mg\,(\cos\theta - \sin\theta) + m\omega^2\left(\cos^2\theta - \sin^2\theta\right) \\ &= m\left[-2g + \omega^2(\cos\theta + \sin\theta)\right](\cos\theta - \sin\theta)\ , \end{aligned}$$

così che $dU/d\theta = 0$ per
$$\sin\theta = \cos\theta \ ,$$
che è verificata per
$$\theta = \frac{\pi}{4} \ , \qquad \theta = \pi + \frac{\pi}{4} \ ,$$
oppure per
$$\cos\theta + \sin\theta = \frac{2g}{\omega^2} \equiv \alpha \ .$$
Per trovare le soluzioni dell'ultima relazione, tenendo conto che
$$\begin{aligned}\cos\theta + \sin\theta &= \sqrt{2}\left(\cos\theta\frac{1}{\sqrt{2}} + \sin\theta\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}\,(\cos\theta\cos\pi/4 + \sin\theta\sin\pi/4)\\ &= \sqrt{2}\cos(\theta - \pi/4) \ ,\end{aligned}$$
si ottiene
$$\theta = \frac{\pi}{4} \pm \arccos\frac{\alpha}{\sqrt{2}} \ ,$$
purché sia $\alpha \le \sqrt{2}$, *i.e.*
$$\omega^2 \ge \sqrt{2}g \ .$$
Se tale diseguaglianza è soddisfatta abbiamo due soluzioni dell'equazione $\cos(\theta - \pi/4) = \alpha$, che possiamo indicare con θ_0 e $\pi/2 - \theta_0$, dove θ_0 è quella compresa in $[-\pi/4, \pi/4]$, *i.e.*
$$\theta_0 = \frac{\pi}{4} - \arccos\frac{\alpha}{\sqrt{2}} \ .$$
Si veda la Figura 1.

In conclusione, per $\omega^2 > \sqrt{2}g$, abbiamo 4 configurazioni d'equilibrio:
$$\begin{aligned}&(Q_1) \qquad \theta = \pi/4 \ ,\\ &(Q_2) \qquad \theta = \pi + \pi/4 \ ,\\ &(Q_3) \qquad \theta = \theta_0 \in [-\pi/4, \pi/4] \ ,\\ &(Q_4) \qquad \theta = \pi/2 - \theta_0 \ ,\end{aligned}$$
che corrispondono alle 4 configurazioni rappresentate in Figura 2, mentre, per $\omega^2 \le \sqrt{2}g$, abbiamo solo 2 configurazioni d'equilibrio:
$$\begin{aligned}&(Q_1) \qquad \theta = \pi/4 \ ,\\ &(Q_2) \qquad \theta = \pi + \pi/4 \ .\end{aligned}$$
Si noti che per $\alpha = \sqrt{2}$, *i.e.* per $\omega^2 = \sqrt{2}g$, le due posizioni (Q_3) e (Q_4) coincidono con (Q_1).

Per discutere la stabilità delle posizioni d'equilibrio trovate occorre studiare la matrice hessiana. Risulta
$$\frac{d^2U}{d\theta^2}(\theta) = 2mg\,(\sin\theta + \cos\theta) - 2m\omega^2\sin 2\theta \ .$$
Quindi, utilizzando che
$$\begin{aligned}&\sin\pi/4 = \cos\pi/4 = \frac{1}{\sqrt{2}} \ ,\\ &\sin(\pi + \pi/4) = \cos(\pi + \pi/4) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \ ,\\ &\sin\pi/2 = 1 \ , \qquad \cos\pi/2 = 0 \ ,\\ &\sin 2\theta = (\cos\theta + \sin\theta)^2 - 1 \ ,\end{aligned}$$

si trova

$$
\begin{aligned}
\frac{d^2U}{d\theta^2}(\pi/4) &= 2m\sqrt{2}g - 2m\omega^2 = 2m\omega^2\left[\frac{\alpha}{\sqrt{2}} - 1\right] \ , \\
\frac{d^2U}{d\theta^2}(\pi+\pi/4) &= -2m\sqrt{2}g - 2m\omega^2 = 2m\omega^2\left[-\frac{\alpha}{\sqrt{2}} - 1\right] \ , \\
\frac{d^2U}{d\theta^2}(\theta_0) &= 2mg\alpha - 2m\omega^2\left[\alpha^2 - 1\right] = 2m\omega^2\left[\frac{\alpha^2}{2} - \alpha^2 + 1\right] = 2m\omega^2\left[\frac{2-\alpha^2}{2}\right] \ , \\
\frac{d^2U}{d\theta^2}(\pi/2-\theta_0) &= \frac{d^2U}{d\theta^2}(\theta_0) \ ,
\end{aligned}
$$

così che si vede che (Q_2) è sempre instabile, (Q_1) è stabile per $\alpha > \sqrt{2}$ (*i.e.* $\omega^2 < \sqrt{2}g$), mentre (Q_3) e (Q_4) sono stabili per $\alpha < \sqrt{2}$ (*i.e.* $\omega^2 > \sqrt{2}g$).

Resta da discutere il caso $\omega^2 = \sqrt{2}g$. In tal caso, scrivendo $\theta = \pi/4 + \varphi$, utilizzando le identità

$$
\begin{aligned}
\sin(\pi/4+\varphi) &= \sin\pi/4\cos\varphi + \sin\varphi\cos\pi/4 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\alpha + \sin\alpha\right) \ , \\
\cos(\pi/4+\varphi) &= \cos\pi/4\cos\varphi - \sin\varphi\sin\pi/4 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\alpha - \sin\varphi\right) \ , \\
\sin(\pi/2+2\varphi) &= \sin\pi/2\cos 2\varphi + \cos\pi/2\sin 2\varphi = \cos 2\varphi \ ,
\end{aligned}
$$

e sviluppando in φ, per $\varphi \approx 0$, l'energia potenziale diventa

$$
\begin{aligned}
U &= -2mg\left(\cos(\pi/4+\varphi) + \sin(\pi/4+\varphi)\right) + \frac{m\omega^2}{2}\sin(\pi/2+2\varphi) \\
&= -2mg\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\varphi - \sin\varphi + \cos\varphi + \sin\varphi\right) + \sqrt{2}mg\,\frac{1}{2}\cos 2\varphi \\
&= \sqrt{2}mg\left[-2\cos\varphi + \frac{1}{2}\cos 2\varphi\right] \\
&\approx \sqrt{2}mg\left[-\frac{3}{2} + (1-1)\varphi^2 + \left(-\frac{1}{12} + \frac{1}{3}\right)\varphi^4 + \text{ termini di ordine superiore }\right] \\
&\approx \text{costante} + C\varphi^4 + \text{ termini di ordine superiore } \ ,
\end{aligned}
$$

con $C > 0$, e quindi la posizione d'equilibrio risulta essere stabile.

Più semplicemente si poteva osservare che per il Teorema di Weierstrass la funzione $U(\theta)$ deve avere massimi e minimi in $[-\pi, \pi]$. Inoltre, per il Teorema di Lagrange i minimi (isolati) corrispondono a punti d'equilibrio stabile. Poiché $\pi + \pi/4$ è un punto d'equilibrio instabile e quindi non può essere un minimo, ne segue che deve essere un minimo (isolato) per $U(\theta)$ l'unico altro punto stazionario esistente, *i.e.* $\pi/4$: quindi $\pi/4$ è un punto d'equilibrio stabile.

---

(4) Aggiungendo il punto P_0 e le due molle che lo connettono ai punti P_2 e P_4, l'energia cinetica diventa

$$
T = 2m\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m\dot{y}^2
$$

e l'energia potenziale diventa

$$
U = mgy - 2mg\left(\cos\theta + \sin\theta\right) + m\omega^2\sin\theta\cos\theta + ky^2 + ky\left(\cos\theta + \sin\theta\right) \ ,
$$

avendo, al solito, trascurato i termini costanti.

Quindi la lagrangiana del sistema è data da

$$\mathcal{L} = T - U = 2m\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m\dot{y}^2 - mgy + 2mg(\cos\theta + \sin\theta) - m\omega^2 \sin\theta\cos\theta - ky^2 - ky(\cos\theta + \sin\theta)$$

e le corrispondenti equazioni di Eulero-Lagrange sono

$$\begin{aligned} 4m\ddot{\theta} &= [2mg - ky](\cos\theta - \sin\theta) - m\omega^2 \cos 2\theta\ , \\ m\ddot{y} &= -mg - 2ky - k(\cos\theta + \sin\theta)\ . \end{aligned}$$

(5.1) Per prima cosa dimostriamo che, per i valori dei parametri dati, *i.e.* $m = k = g = \omega = 1$, la configurazione (Q_1) data da

$$(\theta, y) = (\pi/4, -mg/2k - 1/\sqrt{2}) = (\pi/4, -1/2 - 1/\sqrt{2})$$

risulta essere una posizione d'equilibrio stabile.

I punti d'equilibrio sono i punti stazionari del potenziale, che ora dipende dalle due variabili (θ, y).

Si ha

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial\theta} &= (\cos\theta - \sin\theta)[ky - 2mg] + m\omega^2 \cos 2\theta = (\cos\theta - \sin\theta)\left[ky - 2mg + m\omega^2(\cos\theta + \sin\theta)\right]\ , \\ \frac{\partial U}{\partial y} &= mg + k[2y + (\cos\theta + \sin\theta)]\ , \end{aligned}$$

così che $\partial U/\partial y = 0$ per

$$y = -\frac{mg}{2k} - \frac{1}{2}(\cos\theta + \sin\theta)\ ,$$

Si vede inoltre che $\partial U/\partial\theta = 0$ è verificata per

$$\sin\theta = \cos\theta\ ,$$

che vale per

$$\theta = \frac{\pi}{4}\ , \qquad \theta = \pi + \frac{\pi}{4}\ .$$

Se $\theta = \pi/4$, l'equazione $\partial U/\partial y = 0$ implica $y = -mg/2k - 1/\sqrt{2}$. In particolare, per i valori dei parametri dati, si ha che (Q_1) è un punto d'equilibrio.

Per discutere la stabilità del punto d'equilibrio (Q_1), occorre considerare la matrice hessiana $\mathcal{H}(\theta, y)$, i cui elementi sono

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{11} &\equiv \frac{\partial^2 U}{\partial\theta^2} = (2mg - ky)(\sin\theta + \cos\theta) - 2m\omega^2 \sin 2\theta\ , \\ \mathcal{H}_{12} = \mathcal{H}_{21} &\equiv \frac{\partial^2 U}{\partial\theta\partial y} = k(\cos\theta - \sin\theta)\ , \\ \mathcal{H}_{22} &\equiv \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 2k\ . \end{aligned}$$

Si trova allora, per la posizione d'equilibrio (Q_1),

$$\mathcal{H}(\pi/4, -mg/2k - 1/\sqrt{2}) = \begin{pmatrix} 5\sqrt{2}mg/2 + k - 2m\omega^2 & 0 \\ 0 & 2k \end{pmatrix}\ ,$$

così che $\det\mathcal{H}(\pi/4, -mg/2k - 1/\sqrt{2}) > 0$ e $\mathcal{H}_{11}(\pi/4, -mg/2k - 1/\sqrt{2}) > 0$ per

$$2m\omega^2 < k + \frac{5}{2}\sqrt{2}mg\ ,$$

mentre $\det \mathcal{H}(\pi/4, -mg/2k - 1/\sqrt{2}) < 0$ se $2m\omega^2 > k + 5\sqrt{2}mg/2$.

Quindi per i valori dei parametri dati, la posizione (Q_1) risulta essere stabile.

Le forze che agiscono sul punto P_0 sono la forza peso

$$\mathbf{F}^{(1)} = (0, -mg) \ ,$$

e le forze elastiche dovute alle due molle, che, nella configurazione considerata, risultano essere (cfr. la Figura 3)

$$\mathbf{F}^{(2)} = (k/\sqrt{2}, k(mg/2k - 1/\sqrt{2} + 1/\sqrt{2})) \ , \qquad \mathbf{F}^{(3)} = (-k/\sqrt{2}, k(mg/2k - 1/\sqrt{2} + 1/\sqrt{2})) \ ,$$

così che la forza risultante che agisce sul punto P_0 è data da

$$\mathbf{F} \equiv \mathbf{F}^{(1)} + \mathbf{F}^{(2)} + \mathbf{F}^{(3)} = (0, -mg + k(mg/2k + mg/2k)) = (0, 0) \ .$$

Poiché siamo in una posizione d'equilibrio, se indichiamo con (x_0, y_0) le coordinate del punto P_0 e teniamo conto del vincolo $(x_0, y_0) = (0, y)$, abbiamo

$$\ddot{x}_0 = 0 \ , \qquad \ddot{y}_0 = \ddot{y} = 0 \ ,$$

così che la rezione vincolare è data da

$$\mathbf{R} = -\mathbf{F} = \mathbf{0} \ :$$

nella configurazione d'equilibrio dunque il punto P_0 non risente di alcuna rezione vincolare.

(5.2) Poiché il sistema considerato è un sistema a un grado di libertà, possiamo ricavare informazioni sulle orbite nello spazio $(\theta, y) = (\theta, \dot{\theta})$ dallo studio dell'energia potenziale

$$U(\theta) = -2mg\,(\cos\theta + \sin\theta) + m\omega^2 \sin\theta\cos\theta \ .$$

Come mostra la discussione al punto (1) occorre distinguere due casi: $\alpha < \sqrt{2}$ e $\alpha \geq \sqrt{2}$.

Nel primo caso abbiamo le quattro configurazioni d'equlibrio (Q_j), $j = 1, \ldots, 4$, di cui (Q_3) e (Q_4), individuate da $\theta = \theta_0$ e $\theta = \pi/2 - \theta_0$, rappresentano dei minimi per $U(\theta)$, mentre le posizioni (Q_1) e (Q_4), individuate da $\theta = \pi/4$ e $\theta = \pi + \pi/4$, rappresentano dei massimi (relativi).

Si vede facilmente che

$$\begin{aligned} U(\pi/4) &= -2\sqrt{2}mg + \frac{1}{2}m\omega^2 = \frac{1}{2}m\omega^2\left(-2\sqrt{2}\alpha + 1\right) \equiv E_1 \ , \\ U(\pi + \pi/4) &= 2\sqrt{2}mg + \frac{1}{2}m\omega^2 \frac{1}{2}m\omega^2\left(2\sqrt{2}\alpha + 1\right) \equiv E_2 \ , \\ U(\theta_0) = U(\pi/2 - \theta_0) &= -2mg\alpha + \frac{1}{2}m\omega^2\left(\alpha^2 - 1\right) = \frac{1}{m\omega^2}\left(-2\alpha^2 - 1\right) \equiv E_3 \ , \end{aligned}$$

dove $E_3 < E_2 < E_1$. Quindi, per $\alpha < \sqrt{2}$, $U(\theta)$ ha la forma rappresentata in Figura 4.

Si può notare che il grafico di $U(\theta)$ è simmetrico rispetto al punto $\theta = \pi/4$.

Infatti se definiamo

$$U(\theta) = U(\pi/4 + \varphi) \equiv \tilde{U}(\varphi) \ ,$$

risulta, utilizzando le relazioni trigonometriche date al punto (2),

$$\tilde{U}(\varphi) = -2\sqrt{2}mg\cos\varphi + \frac{1}{2}m\omega^2\left(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi\right) = \tilde{U}(-\varphi) \ ,$$

i.e. $\tilde{U}(\varphi)$ è pari in φ.

Nel piano (θ, y) quindi le curve di livello sono della forma in Figura 5. Si hanno due punti d'equilibrio stabile in θ_0 e $\pi/2 - \theta_0$, corrisponenti all'enrgia $E = E(\theta_0, 0) \equiv H(\pi/2 - \theta_0, 0) = E_3$, dove

$$H = T + U$$

è l'energia vista come funzione di $(\theta, \dot{\theta})$, che è una costante del moto, essendo il sistema sotto studio un sistema meccanico conservativo.

Si ha inoltre un punto d'equilibrio instabile in $\pi/4$ che giace su una curva di livello che comprende, oltre al punto stesso, anche le separatrici di energia $E = H(\pi/4, 0) = E_2$, e un punto d'equilibrio instabile in $\pi + \pi/4$ che giace su una curva di livello che comprende, oltre al punto stesso, anche le separatrici di energia $E = H(\pi + \pi/4, 0) = E_1$.

Il verso di percorrenza delle traiettorie è da sinistra a destra nel semipiano superiore e da destra a sinistra nel semipiano inferiore.

Tutte le traiettorie che non appartengono alle curve di livello individuate dalle separatrici e dai punti d'equilibrio sono periodiche.

Possiamo individuarle tramite la condizione

$$(\bar{\theta}, \bar{y}) \text{ tali che } H(\bar{x}, \bar{y}) = E \text{ con } E > E_3 \ , \quad E \neq E_1, E_2 \ .$$

Nel caso in cui sia $\alpha \geq \sqrt{2}$ si hanno solo due punti critici per l'energia potenziale, che corrispondono al punto di minimo $\theta = \pi/4$ e al punto di massimo $\theta = \pi + \pi/4$. Di nuovo il grafico di $U(\theta)$ è simmetrico rispetto al punto $\theta = \pi/4$: esso è rappresentato in Figura 6, tenendo conto che

$$\begin{aligned} U(\pi/4) = -2\sqrt{2}mg + \frac{1}{2}m\omega^2 = \frac{1}{2}m\omega^2\left(-2\sqrt{2}\alpha + 1\right) \equiv E_1 \ , \\ U(\pi + \pi/4) = 2\sqrt{2}mg + \frac{1}{2}m\omega^2 \frac{1}{2}m\omega^2\left(2\sqrt{2}\alpha + 1\right) \equiv E_2 \ , \end{aligned}$$

Corrispondentemente le orbite nello spazio (θ, y) sono date dalla Figura 7 e possono essere discusse come nel caso precedente con le ovvie modifiche.

Le traiettorie periodiche sono individuate dalle condizioni iniziali

$$(\bar{\theta}, \bar{y}) \text{ tali che } H(\bar{x}, \bar{y}) = E \text{ con } E > E_2 \ , \quad E \neq E_1 \ .$$