Corso di laurea in Matematica

Sistemi dinamici – Primo Modulo

Prova d'esame 15-02-99

Una sbarra omogenea di massa m e lunghezza ℓ è vincolata a muoversi in un piano verticale π; un estremo A della sbarra è incernierato a un punto fisso O, mentre l'altro B è collegato tramite una molla di lunghezza a riposo nulla e costante elastica k a un punto Q, di massa m, libero di muoversi lungo la verticale r condotta per O.

(1) Scrivere la lagrangiana del sistema e le corrispondenti equazioni di Eulero-Lagrange, utilizzando come coordinate lagrangiane l'angolo θ che la sbarra forma con la verticale discendente e la coordinata di Q lungo l'asse r.

(2) Determinare le posizioni d'equilibrio e discuterne la stabilità, limitandosi ai soli casi che si possono risolvere mediante un'analisi al secondo ordine.

(3) Rispondere a scelta a una delle due seguenti domande:

(3.1) Discutere i casi che non si possono risolvere con la sola analisi al secondo ordine.

(3.2) Determinare le reazioni vincolari che agiscono sul punto Q.

(4) Si consideri il sistema modificato nel modo seguente. La molla considerata precedentemente collega ora il punto B a un punto Q senza massa libero di scorrere lungo l'asse r in modo tale che la forza elastica sia sempre ortogonale all'asse r. Inoltre il piano π ruota intorno all'asse r con velocità angolare costante ω. Scrivere la lagrangiana del sistema e le corrispondenti equazioni di Eulero-Lagrange per il sistema così modificato.

(5) Discutere in generale le traiettorie al variare dei dati iniziali, nel caso in cui sia $m\omega^2 > 3k$. In particolare determinare i dati iniziali che dànno luogo a traiettorie periodiche.