Corso di laurea in Matematica

Sistemi dinamici – Primo Modulo

Prova d'esame 15-02-99

CORREZIONE

---

(1) Scegliendo un sistema di coordinate (x, y) sul piano π tale che $O = (0, 0)$ e l'asse y sia la verticale passante per O individuata dall'asse r e indicando con C il centro d'inerzia della sbarra, le coordinate cartesiane dei punti B, C e Q sono allora date da

$$B = (\ell \sin\theta, -\ell\cos\theta) , \qquad C = (\ell\sin\theta/2, -\ell\cos\theta/2) , \qquad Q = (0, y) .$$

Le velocità dei punti C e Q sono quindi

$$\mathbf{v}_C = (\ell\cos\theta\dot\theta/2, \ell\sin\theta\dot\theta/2) , \qquad \mathbf{v}_Q = (0, \dot y) .$$

L'energia cinetica del sistema è dunque

$$T = \frac{1}{6}m\ell^2\dot\theta^2 + \frac{1}{2}m\dot y^2 ,$$

dove il primo termine (che rappresenta l'energia cinetica della sbarra) può essere calcolato o mediante l'applicazione del Teorema di König, secondo il quale l'energia cinetica è data dalla somma dell' energia cinetica del centro d'inerzia più l'energia cinetica rispetto al sistema del centro d'inerzia, *i.e.*

$$\frac{1}{2}m\mathbf{v}_C^2 + \frac{1}{2}I_0\dot\theta^2 , \qquad I_0 = \frac{m\ell^2}{12} ,$$

o mediante l'applicazione del Teorema di Huygens-Steiner, che dà

$$\frac{1}{2}I\dot\theta^2 = \frac{1}{2}\left(I_0 + m\left(\frac{\ell}{2}\right)^2\right)\dot\theta^2 ,$$

se I rappresenta il momento d'inerzia della sbarra per rotazioni intorno a un'asse perpendicolare al piano π passante per l'estremo $A \equiv O$.

L'energia potenziale è invece

$$U = -\frac{mg\ell}{2}\cos\theta + mgy + \frac{1}{2}ky^2 + k\ell y\cos\theta ,$$

avendo trascurato i termini costanti.

Quindi la lagrangiana del sistema è data da

$$\mathcal{L} = T - U = \frac{1}{6}m\ell^2\dot\theta^2 + \frac{1}{2}m\dot y^2 + \frac{mg\ell}{2}\cos\theta - mgy - \frac{1}{2}ky^2 - k\ell y\cos\theta$$

e le corrispondenti equazioni di Eulero-Lagrange sono

$$\begin{aligned} \frac{m\ell^2}{3}\ddot\theta &= -\frac{mg\ell}{2}\sin\theta + k\ell y\sin\theta , \\ m\ddot y &= -mg - ky - k\ell\cos\theta . \end{aligned}$$

(2) I punti d'equilibrio sono i punti stazionari del potenziale. Si ha

$$\begin{aligned}\frac{\partial U}{\partial \theta} &= \left(\frac{mg\ell}{2} - k\ell y\right)\sin\theta \ , \\ \frac{\partial U}{\partial y} &= mg + ky + k\ell\cos\theta \ ,\end{aligned}$$

così che $\partial U/\partial\theta = 0$ per

$$\sin\theta = 0 \ ,$$

che è verificata per

$$\theta = 0 \ , \qquad \theta = \pi \ ,$$

oppure per

$$y = \frac{mg}{2k} \ .$$

L'equazione $\partial U/\partial y = 0$, per $\theta = 0$, dà $ky = -mg - k\ell$, mentre, per $\theta = \pi$, dà $ky = -mg + k\ell$; infine se $y = mg/2k$ si ha

$$\cos\theta = -\frac{3mg}{2k\ell} \ ,$$

purché

$$\alpha \equiv \frac{3mg}{2k\ell} \leq 1 \ .$$

Le posizioni d'equilibrio sono quindi, per $\alpha < 1$,

$$\begin{aligned}
&(Q_1) \qquad \theta = 0 \ , \qquad y = y_1 \equiv -\frac{mg + k\ell}{k} \ , \\
&(Q_2) \qquad \theta = \pi \ , \qquad y = y_2 \equiv \frac{k\ell - mg}{k} \ , \\
&(Q_3) \qquad \theta = \theta_0 \ , \qquad y = y_0 \equiv \frac{mg}{2k} \ , \\
&(Q_4) \qquad \theta = -\theta_0 \ , \qquad y = y_0 \equiv \frac{mg}{2k} \ ,
\end{aligned}$$

dove θ_0 è una delle due radici dell'equazione $\cos\theta = -3mg/2k\ell = -\alpha$ (per esempio quella positiva), mentre, per $\alpha \geq 1$, si hanno le posizioni d'equilibrio (Q_1) e (Q_2). Ved. la Figura 1.

Si noti che per $\alpha = 1$ le due posizioni (Q_3) e (Q_4) coincidono con (Q_2); per $\alpha < 1$ tali posizioni corrispondono a due angoli tali che $\theta_0 \in (\pi/2, \pi)$.

Per discutere la stabilità dei punti d'equilibrio trovati, occorre considerare la matrice hessiana $\mathcal{H}(\theta, y)$, i cui elementi sono

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_{11}(\theta, y) &\equiv \frac{\partial^2 U}{\partial\theta^2}(\theta, y) = \left(\frac{mg\ell}{2} - k\ell y\right)\cos\theta \ , \\
\mathcal{H}_{12}(\theta, y) = \mathcal{H}_{21}(\theta, y) &\equiv \frac{\partial^2 U}{\partial\theta\partial y}(\theta, y) = -k\ell\sin\theta \ , \\
\mathcal{H}_{22}(\theta, y) &\equiv \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}(\theta, y) = k \ .
\end{aligned}$$

Si trova allora, per la posizione d'equilibrio (Q_1),

$$\mathcal{H}(0, y_1) = \begin{pmatrix} mg\ell/2 + k\ell^2 + mg\ell & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \ ,$$

così che $\det \mathcal{H}(0, y_1) > 0$ e $\mathcal{H}_{11}(0, y_1 > 0$ sempre. Quindi (Q_1) è sempre stabile.

Per la posizione d'equilibrio (Q_2), si ha

$$\mathcal{H}(\pi, y_2) = \begin{pmatrix} -mg\ell/2 + k\ell^2 - mg\ell & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} ,$$

così che $\det \mathcal{H}(\pi, y_2) > 0$ e $\mathcal{H}_{11}(\pi, y_2) > 0$ per

$$\alpha = \frac{3mg}{2k\ell} < 1 .$$

Riguardo alle posizioni d'equilibrio (Q_3) e (Q_4), si trova

$$\mathcal{H}(\pm\theta_0, y_0) = \begin{pmatrix} 0 & -k\ell \sin\theta_0 \\ -k\ell \sin\theta_0 & k \end{pmatrix} ,$$

così che tali posizioni risultano sempre instabili (quando esistono, *i.e.* per $\alpha < 1$).

In conclusione, per $\alpha < 1$, le posizioni d'equlibrio (Q_1) e (Q_2) sono stabili, mentre le posizioni (Q_3) e (Q_4) sono instabili. Per $\alpha > 1$ ci sono solo le due posizioni d'equilibrio (Q_1) e (Q_2), delle quali la prima è stabile e la seconda è instabile.

Nel caso $\alpha = 1$, abbiamo solo due posizioni di cui, come detto, (Q_1) è stabile, mentre nulla possiamo concludere riguardo alla stabilità di (Q_2) poiché il determinante della matrice hessiana è nullo in tal caso.

(3.1) Nel caso in cui sia $\alpha = 1$, *i.e.* $3mg = 2k\ell$, si ha

$$\begin{aligned} U(\theta, y) &= \left(-\frac{mg\ell}{2} + \frac{3mg}{2} y \right) \cos\theta + mgy + \frac{3mg}{4\ell} y^2 \\ &= \frac{mg}{2} \left[(-\ell + 3y) \cos\theta + 2y + \frac{3}{2} \frac{y^2}{\ell} \right] . \end{aligned}$$

Scrivendo $y = y_2 + z$ e $\theta = \pi + \varphi$, così che $\cos\theta = -\cos\varphi$, si ha allora, sviluppando in un intorno di $(z, \varphi) = (0, 0)$,

$$\begin{aligned} U(\pi + \varphi, y_2 + z) &= \frac{mg}{2} \left[(\ell - 3z - 3y_2) \cos\varphi + 2z + 2y_2 + \frac{3}{2} \frac{z^2 + 2zy_2 + y_2^2}{\ell} \right] \\ &\approx \text{costante} + \frac{mg}{2} \left[3z \frac{\varphi^2}{2} + \frac{3}{2\ell} z^2 + \text{ termini di ordine superiore} \right] \\ &\approx \text{costante} + \frac{3mg}{4} z \left[\varphi^2 + \frac{z}{\ell} + \text{ termini di ordine superiore} \right] , \end{aligned}$$

che possiamo riscrivere, per opportuni valori delle costanti a, b,

$$\begin{aligned} U(\pi + \varphi, y_2 + z) &= a + bz \left(\varphi^2 + \frac{z}{\ell} \right) + \text{ termini di ordine superiore} \\ &= a + b\, G(\varphi, z) + \text{ termini du ordine superiore} , \end{aligned}$$

così definendo la funzione $G(\varphi, z) = z(\varphi^2 + z/\ell)$.

Si vede quindi che il segno di $U(\pi + \varphi, y_2 + z) - a$ non è definito in un intorno di $(\varphi, z) = (0, 0)$: infatti si ha

$$\begin{cases} G(\varphi, z) = 0 , & \text{per } z = 0 \text{ e } z = -\varphi^2 \ell , \\ G(\varphi, z) > 0 , & \text{per } z > 0, z > -\varphi^2 \ell \text{ oppure per } z < 0, < -\varphi^2 \ell , \\ G(\varphi, z) < 0 , & \text{altrimenti} \;\; , \end{cases}$$

come illustrato in Figura 2.

Quindi $(0,0)$ è un punto di sella. Ne segue che il punto (Q_2) è instabile per $\alpha = 1$.

(3.2) Per determinare le reazioni vincolari sul punto Q, scriviamo le equazioni di Newton nella forma

$$\begin{cases} m\ddot{x} = F_x + R_x \ , \\ m\ddot{y} = F_y + R_y \ , \end{cases}$$

se (x, y) sono le coordinate del punto Q. Si noti che per il Principio di d'Alembert deve essere $R_y = 0$ e, per la presenza del vincolo, $\ddot{x} = 0$, quindi $R_x = -F_x$.

Scriviamo il potenziale nella forma

$$U(x, y, \ldots) = \frac{1}{2}k\left[(x - \ell\sin\theta)^2 + (y + \ell\cos\theta)^2\right] + mgy + \text{ termini indipendenti da } x \text{ e } y \ \ ,$$

così che

$$F_x = -k\,(x - \ell\sin\theta) \ , \qquad F_y = -k\,(y + \ell\cos\theta) - mg \ ,$$

che calcolati in $(x, y) = (0, y)$ dànno

$$F_x = k\ell\sin\theta \ , \qquad F_y = -k\,(y + \ell\cos\theta) - mg \ .$$

Dalle equazioni di Eulero-Lagrange (cfr, il punto (1)) ricaviamo

$$m\ddot{y} = -k\,(y + \ell\cos\theta) - mg \ ,$$

che implica

$$R_y = m\ddot{y} - F_y = 0 \ ,$$

come già si era notato che dovesse essere. Inoltre

$$R_x = -F_x = -k\ell\sin\theta$$

dà la componente della reazione vincolare $\mathbf{R}$ nella direzione x, così che, in conclusione, risulta

$$\mathbf{R} \equiv (R_x, R_y) = (-k\ell\sin\theta, 0) \ .$$

---

(4) Se il piano π ruota con velocità angolare costante ω e il punto Q è senza massa, nel sistema di riferimento solidale con il piano π l'energia potenziale diventa

$$U(\theta) = -\frac{mg\ell}{2}\cos\theta + \frac{1}{2}k\ell^2\sin^2\theta - \frac{1}{6}\ell^2 m\omega^2\sin^2\theta \ ,$$

dove l'ultimo termine tiene conto della forza centrifuga.

La lagrangiana diventa allora

$$\mathcal{L} = T - U = \frac{1}{6}m\ell^2\dot{\theta}^2 + \frac{mg\ell}{2}\cos\theta - \frac{1}{2}k\ell^2\sin^2\theta + \frac{1}{6}\ell^2 m\omega^2\sin^2\theta \ ,$$

e la corrispondente equazione di Eulero-Lagrange (per θ) è

$$\frac{m\ell^2}{3}\ddot{\theta} = \left[-\frac{mg\ell}{2} - \left(k - \frac{m\omega^2}{3}\right)\ell^2\cos\theta\right]\sin\theta \ .$$

(5) Lo studio qualitativo dei moti del sistema può essere ricondotto allo studio dell'energia potenziale $U(\theta)$. I punti d'equilibrio sono i punti stazionari dell'energia potenziale. Si ha

$$\frac{dU}{d\theta} = \left[\frac{mg\ell}{2} + \left(k\ell^2 - \frac{m\omega^2\ell^2}{3} \right) \cos\theta \right] \sin\theta \ ,$$

così che $dU/d\theta = 0$ per

$$\sin\theta = 0 \ ,$$

che è verificata per

$$\theta = 0 \ , \qquad \theta = \pi \ ,$$

oppure per

$$\cos\theta = \frac{mg}{2\ell\,(m\omega^2/3 - k)} \ ,$$

che è soddisfatta purché

$$\alpha \equiv \frac{mg}{2\ell\,(m\omega^2/3 - k)} \leq 1 \ .$$

[A differenza del caso precedente ora α potrebbe essere anche negativo. Tuttavia nell'ipotesi $m\omega^2/3 - k > 0$ dobbiamo considerare solo valori di α positivi.]

Le posizioni d'equilibrio sono quindi, per $0 < \alpha < 1$,

$$\begin{array}{ll} (Q_1) \qquad & \theta = 0 \ , \\ (Q_2) \qquad & \theta = \pi \ , \\ (Q_3) \qquad & \theta = \theta_0 \ , \\ (Q_4) \qquad & \theta = -\theta_0 \ , \end{array}$$

dove θ_0 è una delle due radici dell'equazione $\cos\theta = -\alpha$ (per esempio quella positiva), mentre, per $\alpha > 1$, si hanno le posizioni d'equilibrio (Q_1) e (Q_2). Ved. la Figura 3.

Si noti che, di nuovo, per $\alpha = 1$ le due posizioni (Q_3) e (Q_4) coincidono con (Q_2). [Allo stesso modo, per $\alpha = -1$, esse coincidono con (Q_1).]

Per discutere la stabilità dei punti d'equilibrio trovati, occorre considerare la derivata seconda di $U = U(\theta)$. Si ha

$$\frac{d^2U}{d\theta^2}(\theta) = \frac{mg\ell}{2} \cos\theta + \left(k\ell^2 - \frac{m\omega^2\ell^2}{3} \right) \cos 2\theta \ ,$$

essendosi tenuto conto che $2\sin\theta\cos\theta = \sin 2\theta$.

Si trova allora, per la posizione d'equilibrio (Q_1),

$$\frac{d^2U}{d\theta^2}(0) = \frac{mg\ell}{2} + k\ell^2 - \frac{m\omega^2\ell^2}{3} \ ,$$

che risulta strettamente positiva per

$$\frac{m\omega^2\ell^2}{3} < k\ell^2 + \frac{mg\ell}{2} \ ,$$

ovvero per

$$\alpha > 1 \ .$$

Se tale condizione è soddisfatta il punto (Q_1) è un punto d'equilibrio stabile, altrimenti, se $\alpha < 1$, esso è instabile.

Per la posizione (Q_2) si trova

$$\frac{d^2U}{d\theta^2}(\pi) = -\frac{mg\ell}{2} + k\ell^2 - \frac{m\omega^2\ell^2}{3} \ ,$$

che risulterebbe strettamente positiva per

$$\frac{m\omega^2\ell^2}{3} < k\ell^2 - \frac{mg\ell}{2} \ ,$$

purché $2k\ell > mg$. Tuttavia tale diseguaglianza implicherebbe $m\omega^2/3 - k < 0$ contro l'ipotesi; quindi, nel caso che stiamo studiando, la posizione d'equilibrio (Q_2) è sempre instabile.

Infine per le posizioni (Q_3) e (Q_4), che devono essere considerate per $\alpha < 1$, si ha

$$\begin{aligned}\frac{d^2U}{d\theta^2}(\pm\theta_0) &= \frac{mg\ell}{2}\cos\theta_0 + \left(k\ell^2 - \frac{m\omega^2\ell^2}{3}\right)\left(2\cos^2\theta_0 - 1\right) \\ &= \left(\frac{m\omega^2\ell^2}{3} - k\right)\left(1 - \alpha^2\right) \ ,\end{aligned}$$

essendosi tenuto conto che

$$\cos 2\theta_0 = \cos^2\theta_0 - \sin^2\theta_0 = 2\cos^2\theta_0 - 1 \ .$$

Si vede quindi che $d^2U/d\theta^2(\pm\theta_0) > 0$ se

$$\alpha < 1 \ .$$

Questo completa la discussione dei casi che possono essere risolti mediante un'analisi al secondo ordine nel caso $m\omega^2 > 3k$.

Per il caso $\alpha = 1$ si può facilmente vedere che la posizione (Q_1) è un punto d'equilibrio stabile per il sistema. Infatti per $\alpha = 1$ la posizione (Q_2) corrisponde a un punto di massimo per $U(\theta)$; poiché l'unico altro punto critico per $U(\theta)$ è (Q_1) e per il Teorema di Wierstrass la funzione $U(\theta)$ deve ammettere almeno un punto di minimo nel suo intervallo di definizione, allora tale minimo deve essere (Q_1) e, per il Teorema di Lagrange, quindi (Q_1) è un punto d'equilibrio stabile.

Possiamo quindi concludere che nello spazio $(\theta, y) = (\theta, \dot\theta)$ le orbite sono come rappresentate in Figura 4 per $\alpha \geq 1$ e come in Figura 5 per $\alpha < 1$.

Nel primo caso ($\alpha \geq 1$), se

$$\begin{aligned}U(0) &= E_1 = -mg\ell/2 \ , \\ U(\pi) &= E_2 = mg\ell/2 \ ,\end{aligned}$$

con $E_1 < E_2$, tutte le orbite sono chiuse (e sono percorse quindi da traiettorie periodiche) tranne quelle che corrispondono ai valori di energia E_1 (per il quale si ha il solo punto d'equilibrio $(\theta, y) = (0, 0)$) ed E_2 (per il quale si hanno il punto d'equilibrio $(\theta, y) = (\pi, 0)$ e le due separatrici sulle quali si svolgono moti asintotici).

Possiamo quindi caratterizzare le traiettorie periodiche individuandone i dati iniziali attraverso la condizione

$$|\bar\theta| \leq \pi \ , \qquad E_1 < H(\bar\theta, \bar y) \neq E_2 \ ,$$

dove

$$H(\theta, y) = \frac{1}{6}m\ell^2y^2 - \frac{mg\ell}{2}\cos\theta + \frac{1}{2}k\ell^2\sin^2\theta - \frac{1}{6}\ell^2m\omega^2\sin^2\theta$$

è l'energia totale del sistema.

Nel secondo caso ($\alpha < 1$), si hanno quattro punti d'equilibrio, di cui $(\theta, y) = (\pm\theta_0, 0)$ sono stabili, mentre $(\theta, y) = (0, 0)$ e $(\theta, y) = (\pi, 0)$ sono instabili. Risulta

$$\begin{aligned}U(0) &= E_1 = -mg\ell/2 \ , \\ U(\pi) &= E_2 = mg\ell/2 \ , \\ U(\theta_0) &= U(-\theta_0) = E_3 \ ,\end{aligned}$$

con $E_3 < E_1 < E_2$. Di nuovo tutte le traiettorie sono periodiche tranne quelle che corrispondono ai valori di energia E_1, E_2 ed E_3 (per i quali si hanno, rispettivamente, i due punti d'equilibrio $(\theta, y) = (\pm\theta_0, 0)$, il punto d'equilibrio $(\theta, y) = (0, 0)$ e le separatrici associate, il punto d'equilibrio $(\theta, y) = (\pi, 0)$ e le separatrici associate).

In particolare le traiettorie periodiche sono individuate dai dati iniziali attraverso la condizione

$$|\bar{\theta}| \leq \pi \,, \qquad E_3 < H(\bar{\theta}, \bar{y}) \neq E_1, E_2 \,.$$