

**Corso di laurea in Matematica**  
**Sistemi dinamici – Primo Modulo / Secondo Modulo**

PROVA D'ESAME 13-07-99

Due punti materiali  $P_1$  e  $P_2$ , entrambi di massa  $m$ , sono vincolati a muoversi su un piano, sottoposti ai seguenti vincoli:

- il punto  $P_2$  si muove lungo una sbarra lineare omogenea  $S$  di massa  $M$  e lunghezza  $2\ell$  il cui centro  $O$  è fisso;
- il punto  $P_1$  è collegato ai punti  $O$  e  $P_2$  tramite due sbarre rettilinee  $S_1$  e  $S_2$ , entrambe di lunghezza  $\ell$  e massa trascurabile (nulla).

Inoltre il punto  $P_2$  è unito al punto  $O$  tramite una molla di costante elastica  $k > 0$  e lunghezza a riposo trascurabile (nulla).

Si assuma che all'istante iniziale il punto  $P_2$  non coincida con  $O$ .

Si scelgano come variabili lagrangiane l'angolo  $\varphi$  che la sbarra forma con l'asse  $x$  di un sistema cartesiano  $(O, x, y)$  e l'angolo  $\theta$  che la sbarra  $S_1$  forma rispetto alla sbarra  $S$ .

- (1) Scrivere la lagrangiana del sistema e le corrispondenti equazioni di Eulero-Lagrange.
- (2) Dedurre quindi che la variabile  $\varphi$  è ciclica e applicare il metodo di Routh per ridurre il sistema a un sistema a 1 grado di libertà.
- (3\*) Verificare che l'energia cinetica è una forma quadratica definita positiva nella velocità.
- (4) Nel caso  $m = \ell = k = 1$  e  $M = 0$ , determinare le posizioni d'equilibrio del sistema a 1 grado di libertà ottenuto al punto (2) e discuterne la stabilità, limitandosi ai casi che si possono risolvere attraverso un'analisi al secondo ordine.
- (5\*) Come al punto (4), per i casi che non possono essere risolti mediante l'analisi al secondo ordine.
- (6) A che tipo di moto per il sistema a 2 gradi di libertà corrispondono le posizioni d'equilibrio trovate al punto (4) ?
- (7\*) In generale esprimere le soluzioni delle equazioni del moto per il sistema a 2 gradi di libertà in termini di integrali definiti. [SUGGERIMENTO. Si tenga conto che la lagrangiana è definita a meno di una derivata totale.]
- (8\*) Discutere cosa succede qualora si considerino anche dati iniziali tali che  $P_2$  coincida con  $O$  all'istante iniziale.