Corso di laurea in Matematica

Sistemi dinamici – Primo Modulo

Prova d'esame 13-07-99

CORREZIONE

---

(1) Definendo φ l'angolo che la sbarra S forma con l'asse x a θ l'angolo che la sbarra S_1 forma con la retta individuata dalla sbarra S, si ha (cfr. la Fig. 1)

$$\begin{cases} P_1 = (\ell\cos(\varphi-\theta), \ell\sin(\varphi-\theta)) \ , \\ P_2 = (2\ell\cos\theta\cos\varphi, 2\ell\cos\theta\sin\varphi) \ , \end{cases}$$

così che

$$\begin{cases} \mathbf{v}_1 = (-\ell\,(\dot\varphi-\dot\theta)\,\sin(\varphi-\theta), \ell\,(\dot\varphi-\dot\theta)\,\cos(\varphi-\theta)) \ , \\ \mathbf{v}_2 = (-2\ell\dot\theta\sin\theta\cos\varphi - 2\ell\dot\varphi\cos\theta\sin\varphi, -2\ell\dot\theta\sin\theta\sin\varphi + 2\ell\dot\varphi\cos\theta\cos\varphi) \ . \end{cases}$$

La lagrangiana è dunque

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{1}{2} m \left[\ell^2 \left(\dot\varphi^2 + \dot\theta^2 - 2\dot\varphi\dot\theta \right) + 4\ell^2 \left(\dot\varphi^2 \cos^2\theta + \dot\theta^2 \sin^2\theta \right) \right] \\ & + \frac{1}{2} \left(\frac{4M\ell^2}{12} \right) \dot\varphi^2 - \frac{1}{2} k \left(4\ell^2 \right) \cos^2\theta \ , \end{aligned}$$

che può essere riscritta come

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m\ell^2 \left[\left(1+4\cos^2\theta\right)\dot\varphi^2 + \left(1+4\sin^2\theta\right)\dot\theta^2 - 2\dot\varphi\dot\theta + \frac{M}{3m}\dot\varphi^2 \right] - 2k\ell^2\cos^2\theta \ .$$

Si noti che la coordinata φ è ciclica.

---

(2) Definendo

$$p \equiv \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot\varphi} \ ,$$

si trova

$$p = \left[m\ell^2 \left(1+\cos^2\theta\right) + \frac{1}{3} M\ell^2 \right] \dot\varphi - m\ell^2\dot\theta \ .$$

La lagrangiana ridotta $\mathcal{L}_R$ è allora data da

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_R = \mathcal{L} - p\dot\varphi = & \frac{1}{2} m\ell^2 \left(1+4\sin^2\theta\right)\dot\theta^2 - \frac{m^2\ell^4\dot\theta^2}{2[m\ell^2\left(1+4\cos^2\theta\right) + M\ell^2/3]} \\ & - \frac{pm\ell^2\dot\theta}{m\ell^2\left(1+4\cos^2\theta\right) + M\ell^2/3} - 2k\ell^2\cos^2\theta - \frac{p^2}{2[m\ell^2\left(1+4\cos^2\theta\right) + M\ell^2/3]^2} \ . \end{aligned}$$

Poiché p è una costante del moto la funzione $\mathcal{L}_R$ dipende da $(\theta,\dot\theta)$ e, in maniera parametrica, da p: per il Teorema di Routh descrive la lagrangiana di un sistema a un grado di libertà, con energia cinetica

$$\begin{aligned} T \equiv T(\theta,\dot\theta) = & \frac{1}{2} m\ell^2 \left(1+4\sin^2\theta\right)\dot\theta^2 - \frac{m^2\ell^4\dot\theta^2}{2[m\ell^2\left(1+4\cos^2\theta\right) + M\ell^2/3]} \\ & - \frac{pm\ell^2\dot\theta}{m\ell^2\left(1+4\cos^2\theta\right) + M\ell^2/3} \end{aligned}$$

ed energia potenziale

$$U \equiv U(\theta) = 2k\ell^2 \cos^2\theta + \frac{p^2}{2[m\ell^2\,(1+4\cos^2\theta) + M\ell^2/3]^2} \ .$$

---

(3) Dalla definizione di T si ha

$$\frac{\partial^2 T}{\partial \dot\theta^2} = \frac{m\ell^4}{m\ell^2\,(1+4\cos^2\theta) + M\ell^2/3}\left[\left(4\sin^2\theta + 4\cos^2\theta + 16\sin^2\theta\cos^2\theta\right) m + \frac{M}{3}\left(1+4\sin^2\theta\right)\right] > 0 \ .$$

---

(4) L'energia potenziale U, per i valori dei parametri dati, assume la forma

$$U(\theta) = 2\cos^2\theta + \frac{p^2}{2\,(1+4\cos^2\theta)} \ , \qquad \pi \in (-\pi,\pi] \ .$$

Per trovare i punti stazionari di $U(\theta)$ basta studiare l'intervallo $\theta \in [0,\pi/2]$, vista la forma di $U(\theta)$. Posto $x = \cos\theta$ e $U(\theta) = \tilde U(x)$, si ha

$$\begin{aligned} U_\theta &= \tilde U_x x_\theta \ , \\ U_{\theta\theta} &= \tilde U_{xx} x_\theta^2 + \tilde U_x x_{\theta\theta} \ , \end{aligned}$$

dove i sottoscritti indicano derivate.

Si ha

$$\begin{aligned} \tilde U &= \frac{p^2}{2\,(1+4x^2)} + 2x^2 \ , \\ \tilde U_x &= \frac{4x}{\left(1+4x^2\right)^2}\left[\left(1+4x^2\right)^2 - p^2\right] \ , \\ \tilde U_{xx} &= 4\left[1 + \frac{p^2}{\left(1+4x^2\right)^2}\frac{12x^2-1}{1+4x^2}\right] \ . \end{aligned}$$

e

$$x_\theta = -\sin\theta \ , \qquad x_\theta^2 = \sin^2\theta \ , \qquad x_{\theta\theta} = -\cos\theta \ ,$$

così che otteniamo

$$U_\theta = 0 \ \text{se} \ \begin{cases} \sin\theta = 0 \to \theta = 0 \to x = 1 \ , \\ \cos\theta = 0 \to \theta = \pi/2 \to x = 0 \ , \\ p = \pm(1+4\cos^2\theta) = \pm(1+4x^2) \ , \end{cases}$$

dove l'ultima condizione può essere soddisfatta se e solo se

$$|p| \in [1,5] \ ;$$

in tal caso si ha una soluzione $\theta_0 \in [0,\pi/2]$, a cui corrisponde un valore $x_0 = \cos\theta_0$, $0 \le x_0 \le 1$.

Possiamo scrivere $U_{\theta\theta}$ come

$$U_{\theta\theta} = 4\left[1 + \frac{p^2}{\left(1+4x^2\right)^2}\frac{12x^2-1}{1+4x^2}\right]\sin^2\theta - \frac{4x}{\left(1+4x^2\right)^2}\left[\left(1+4x^2\right)^2 - p^2\right]\cos\theta \ ,$$

così che si ha

$$U_{\theta\theta}(0) = -\frac{4}{25}\left(25 - p^2\right)\begin{cases} > 0\,, & \text{se } |p| > 5\,, \\ < 0\,, & \text{se } |p| < 5\,, \end{cases}$$

$$U_{\theta\theta}(\pi/2) = 4\left(1 - p^2\right)\begin{cases} > 0\,, & \text{se } |p| < 1\,, \\ < 0\,, & \text{se } |p| > 1\,, \end{cases}$$

$$U_{\theta\theta}(\theta_0) = 64x_0^2\left(\frac{1 - x_0^2}{1 + 4x_0^2}\right)\begin{cases} > 0\,, & \text{se } 1 < |p| < 5\,, \\ \text{non esiste}\,, & \text{se } |p| \notin [1,5]\,, \end{cases}$$

Quindi

- $\theta = 0$ è stabile se $|p| > 5$, instabile se $|p| < 5$;
- $\theta = \pi/2$ è stabile se $|p| < 1$, instabile se $|p| > 1$;
- $\theta = \theta_0$ esiste ed è stabile se $|p| \in (1,5)$, non esiste se $|p| \notin [1,5]$.

Possiamo riassumere la situazione nel modo seguente:

- se $|p| < 1$, allora esistono 2 punti d'equilibrio in $[0,\pi/2]$: $\theta = 0$ instabile e $\theta = \pi/2$ stabile;
- se $|p| > 5$, allora esistono 2 punti d'equilibrio in $[0,\pi/2]$: $\theta = 0$ stabile e $\theta = \pi/2$ instabile;
- se $|p| \in (1,5)$, allora esistono 3 punti d'equilibrio in $[0,\pi/2]$: $\theta = 0$ instabile, $\theta = \pi/2$ instabile e $\theta = \theta_0$ stabile.

Segue che nell'intervallo $(-\pi,\pi]$ la situazione è la seguente:

- se $|p| < 1$, allora esistono 4 punti d'equilibrio: $\theta = 0$, $\theta = \pi$ instabili e $\theta = \pm\pi/2$ stabili;
- se $|p| > 5$, allora esistono 4 punti d'equilibrio: $\theta = 0$, $\theta = \pi$ stabili e $\theta = \pm\pi/2$ instabili;
- se $|p| \in (1,5)$, allora esistono 8 punti d'equilibrio: $\theta = 0$, $\theta = \pi$, $\theta = \pm\pi/2$ instabili e $\theta = \pm\theta_0$, $\theta = \pi \pm \theta_0$ stabili.
- se $|p| = 1$ o $|p| = 5$ nulla si può concludere attraverso un'analisi del secondo ordine.

Le corrispondenti configurazioni d'equlibrio sono rappresentate in Fig. 2.

---

(5) I casi $|p| = 1$ e $|p| = 5$ possono essere risolti graficamente, notando che la situazione è come rappresenatto in Fig. 3 per $p \to 1$ e come rappresenatto in Fig. 4 per $p \to 5$.

Concludiamo quindi quanto segue:

- per $|p| = 1$, esistono due posizioni d'equilibrio: $\theta = 0$ instabile e $\theta = \pi/2$ stabile;
- per $|p| = 5$, esistono due posizioni d'equilibrio: $\theta = 0$ stabile e $\theta = \pi/2$ instabile.

Si noti che la posizione d'equlibrio θ_0 coincide con una delle altre in tali casi. Più precisamente $\theta_0 = \pi/2$ per $|p| = 1$ e $\theta_0 = 0$ per $|p| = 5$.

---

(6) In corrispondenza di una posizione d'equilibrio $\theta = \bar{\theta}$ si ha $\dot{\theta} = 0$ e quindi il moto della variabile $\theta(t)$ è banale:

$$\theta(t) = \bar{\theta}\,, \qquad \dot{\theta}(t) = 0\,, \qquad \forall t \in \mathbb{R}\,.$$

Dalla defінzione di p si ottiene

$$p = \left(1 + \cos^2\bar{\theta}\right)\dot{\varphi}\,,$$

così che

$$\varphi(t) = \omega t\,, \qquad \omega = p\left(1 + \cos^2\bar{\theta}\right)^{-1}\,.$$

Le traiettorie corrispondenti sono quindi periodiche e si svolgono su orbite circolari.

---

(7) Possiamo scrivere la lagrangiana del sistema come

$$\mathcal{L} = f(\theta)\,\dot{\theta}^2 - g(\theta)\,\dot{\theta} - U(\theta)\,,$$

dove

$$f \equiv f(\theta) = \frac{1}{2}\left(1 + 4\sin^2\theta\right) - \frac{1}{2(1+4\cos^2\theta)} \; ,$$
$$g \equiv g(\theta) = \frac{p}{1+4\cos^2\theta} \; ,$$
$$U \equiv U(\theta) = 2\cos^2\theta + \frac{p^2}{2\left(1+4\cos^2\theta\right)} \; .$$

Poiché

$$g(\theta)\dot\theta \equiv \frac{d}{dt}G(\theta) \; ,$$

per qualche funzione $G(\theta)$, le equazioni del moto corrispondenti alla lagrangiana $\mathcal{L}$ sono le stesse di quelle corrispondenti alla lagrangiana

$$\mathcal{L}' = f(\theta)\,\dot\theta^2 - U(\theta) \; ,$$

che differisce da $\mathcal{L}$ per la derivata totale dG/dt.

Consideriamo dunque il sistema a 1 grado di libertà descritto dalla lagrangiana $\mathcal{L}'$. La conservazione dell'energia implica

$$E = f\dot\theta^2 + U \; ,$$

che risolta rispetto a $\dot\theta$ dà

$$\dot\theta = \pm\sqrt{\frac{E-U}{f}} \equiv \mathcal{S}_\pm(\theta) \; .$$

Possiamo quindi scrivere

$$\int_{\bar\theta}^{\theta(t)} \frac{d\theta}{\mathcal{S}_\pm(\theta)} = t \; ,$$

dove il segno $\pm$ è determinato dalle condizioni iniziali.

Dalla definzione di p segue che, corrispondentemente, $\varphi(t)$ è dato da

$$\varphi(t) = \int_0^t d\tau \left[\left(1 + 4\cos^2\theta(\tau)\right)^{-1} p + \dot\theta(\tau) \right] \; ,$$

che può essere risolta una volta che si sia ottenuta la funzione $\theta(t)$ dall'integrale precedente.

---

(8) Se P_2 coincide con 0 all'istante iniziale, l'evoluzione del sistema può avvenire anche secondo differenti modalità. Infatti esistono anche traiettorie in cui $P_2 \equiv O$ per ogni t, qualora la velocità iniziale del punto P_2 sia nulla.

Si ha in tal caso

$$\begin{cases} P_1 = (\ell\cos\psi, \ell\sin\psi) \; , \\ P_2 = (0,0) \; , \end{cases}$$

dove $\psi = \varphi - \theta$, così che

$$\begin{cases} \mathbf{v}_1 = (-\ell\,\dot\psi\,\sin\psi, \ell\,\dot\psi\,\cos\psi) \; , \\ \mathbf{v}_2 = (0,0) \; , \end{cases}$$

e la lagrangiana si determina di conseguenza.