

Corso di laurea in Matematica
Sistemi dinamici – Primo Modulo

PROVA D'ESAME DELL' 01-02-2000

ESERCIZIO 1. Sia dato il sistema dinamico planare

$$\begin{cases} \dot{x} = x(x^2 - 1)(3y^2 - 1) , \\ \dot{y} = -y(y^2 - 1)(3x^2 - 1) . \end{cases}$$

- (1.1) Trovare una costante del moto $H(x, y)$.
- (1.2) Determinare i punti d'equilibrio.
- (1.3) Discuterne la stabilità.
- (1.4) Studiare qualitativamente le curve di livello.
- (1.5) Individuare i dati iniziali che generano traiettorie periodiche.

ESERCIZIO 2. Dato un sistema di riferimento $\kappa = Oxyz$ (sistema assoluto), si consideri un sistema di riferimento mobile $K = O'\xi\eta\zeta$ (sistema relativo), la cui origine O' si muove in senso antiorario lungo l'ellisse di semiassi di lunghezza $a = 2$ e $b = 1$ e centro l'origine $O = (0, 0)$ nel piano (x, y) , orientata in modo che l'asse maggiore risulti parallelo all'asse x .

L'asse ζ di K si mantiene sempre parallelo all'asse z di κ e K ruota intorno all'asse ζ con velocità angolare costante ω in senso antiorario. All'istante iniziale $t = 0$ il punto O' occupa la posizione $\mathbf{q}_{O'} = (2, 0, 0)$ e gli assi ξ e η sono diretti come gli assi x e y , rispettivamente.

Un punto materiale P di massa $m = 1$ si muove lungo l'asse ξ con legge oraria $\xi(t) = vt$, con v costante positiva.

- (2.1) Scrivere la trasformazione rigida $D: K \rightarrow \kappa$ come composizione di una traslazione C con una rotazione B , *i.e.* $D = CB$, e determinare C e B .
- (2.2) Scrivere la soluzione delle equazioni del moto $\mathbf{q}(t)$ nel sistema assoluto e $\mathbf{Q}(t)$ nel sistema mobile.
- (2.3) Determinare la velocità assoluta \mathbf{v} .
- (2.4) Determinare la velocità relativa \mathbf{v}' .
- (2.5) Determinare la componente traslatoria della velocità di trascinamento \mathbf{v}_0 .
- (2.6) Determinare la componente rotatoria della velocità di trascinamento \mathbf{v}_T .
- (2.7) Determinare la forza di Coriolis \mathbf{F}_2 che agisce sul punto P .