Corso di laurea in Matematica

Sistemi dinamici – Primo Modulo

Prova d'esame dell' 01-02-2000

Esercizio 1. Sia dato il sistema dinamico planare

$$\begin{cases} \dot{x} = x\left(x^2-1\right)\left(3y^2-1\right) \ , \\ \dot{y} = -y\left(y^2-1\right)\left(3x^2-1\right) \ . \end{cases}$$

(1.1) Trovare una costante del moto $H(x, y)$.
(1.2) Determinare i punti d'equilibrio.
(1.3) Discuterne la stabilità.
(1.4) Studiare qualitativamente le curve di livello.
(1.5) Individuare i dati iniziali che generano traiettorie periodiche.

Esercizio 2. Dato un sistema di riferimento $\kappa = Oxyz$ (sistema assoluto), si consideri un sistema di riferimento mobile $K = O'\xi\eta\zeta$ (sistema relativo), la cui origine O' si muove in senso antiorario lungo l'ellisse di semiassi di lunghezza $a = 2$ e $b = 1$ e centro l'origine $O = (0, 0)$ nel piano (x, y), orientata in modo che l'asse maggiore risulti parallelo all'asse x.

L'asse ζ di K si mantiene sempre paralello all'asse z di κ e K ruota intorno all'asse ζ con velocità angolare costante ω in senso antiorario. All'istante iniziale $t = 0$ il punto O' occupa la posizione $\mathbf{q}_{O'} = (2, 0, 0)$ e gli assi ξ e η sono diretti come gli assi x e y, rispettivamente.

Un punto materiale P di massa $m = 1$ si muove lungo l'asse ξ con legge oraria $\xi(t) = vt$, con v costante positiva.
(2.1) Scrivere la trasformazione rigida D: $K \to \kappa$ come composizione di una traslazione C con una rotazione B, *i.e.* $D = CB$, e determinare C e B.
(2.2) Scrivere la soluzione delle equazioni del moto $\mathbf{q}(t)$ nel sistema assoluto e $\mathbf{Q}(t)$ nel sistema mobile.
(2.3) Determinare la velocità assoluta $\mathbf{v}$.
(2.4) Determinare la velocità relativa $\mathbf{v}'$.
(2.5) Determinare la componente traslatoria della velocità di trascinamento $\mathbf{v}_0$.
(2.6) Determinare la componente rotatoria della velocità di trascinamento $\mathbf{v}_T$.
(2.7) Determinare la forza di Coriolis $\mathbf{F}_2$ che agisce sul punto P.