

Corso di laurea in Matematica  
Sistemi dinamici – Primo Modulo

PROVA D'ESAME DELL' 01-02-2000

CORREZIONE

ESERCIZIO 1.

(1.1) Si cerca se esiste una funzione  $H = H(x, y)$  tale che

$$\begin{cases} \dot{x} = x(x^2 - 1)(3y^2 - 1) = \partial H / \partial y, \\ \dot{y} = -y(y^2 - 1)(3x^2 - 1) = -\partial H / \partial x. \end{cases}$$

Integrando  $\dot{x}$  rispetto a  $y$  si ottiene

$$H(x, y) = x(x^2 - 1)(y^3 - y) + c_1(x) = xy(x^2 - 1)(y^2 - 1) + c_1(x),$$

dove  $c_1(x)$  è una funzione che dipenderà dalla sola variabile  $x$ ; integrando  $-\dot{y}$  rispetto a  $x$  si ottiene

$$H(x, y) = y(y^2 - 1)(x^3 - x) + c_2(y) = xy(y^2 - 1)(x^2 - 1) + c_2(y),$$

dove  $c_2(y)$  è una funzione che dipenderà dalla sola variabile  $y$ . Imponendo che le due espressioni trovate siano uguali si trova

$$H(x, y) = xy(y^2 - 1)(x^2 - 1) + c,$$

dove  $c$  è una costante. Si può porre  $c = 0$ :

$$H(x, y) = xy(y^2 - 1)(x^2 - 1).$$

(1.2) Data la funzione  $H$ , le sue derivate prime sono

$$\begin{aligned} H_x &= y(y^2 - 1)(3x^2 - 1), \\ H_y &= x(x^2 - 1)(3y^2 - 1), \end{aligned}$$

quindi le derivate seconde di  $H$  sono date da

$$\begin{aligned} H_{xx} &= 6xy(y^2 - 1), \\ H_{xy} &= (3x^2 - 1)(3y^2 - 1), \\ H_{yy} &= 6xy(x^2 - 1). \end{aligned}$$

I punti d'equilibrio sono i punti in cui si annullano le derivate prime.

Si ha  $H_x = 0$  se  $y = 0$  oppure se  $y = \pm 1$  oppure se  $x = \pm 1/\sqrt{3}$ . Si ha  $H_y = 0$  se  $x = 0$  oppure se  $x = \pm 1$  oppure se  $y = \pm 1/\sqrt{3}$ .

La relazione  $y = 0$ , inserita nell'equazione  $H_y = 0$ , implica che può essere  $H_x = 0$  se  $x = 0$  oppure se  $x = \pm 1$ . La relazione  $y = \pm 1$ , inserita nell'equazione  $H_y = 0$ , implica che può essere  $H_x = 0$  se  $x = 0$  oppure se  $x = \pm 1$ . La relazione  $y = \pm 1/\sqrt{3}$ , inserita nell'equazione  $H_y = 0$ , implica che può essere  $H_x = 0$  se  $x = \pm 1/\sqrt{3}$ .

Quindi i punti d'equilibrio sono i seguenti:

$$\begin{aligned}
 P_1 &= \left( \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right), & P_2 &= \left( \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}} \right), & P_3 &= \left( -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}} \right), & P_4 &= \left( -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right), \\
 P_5 &= (1, 1), & P_6 &= (1, -1), & P_7 &= (-1, -1), & P_8 &= (-1, 1), \\
 P_9 &= (1, 0), & P_{10} &= (0, -1), & P_{11} &= (-1, 0), & P_{12} &= (0, 1), & P_{13} &= (0, 0).
 \end{aligned}$$

Cfr. la Fig. 1.

**(1.3)** *I parte.* Il sistema linearizzato nell'intorno del punto d'equilibrio  $P = (x_0, y_0)$  sarà della forma

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = A(P) \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}$$

dove la matrice  $A(P)$  è data da

$$A(P) = \begin{pmatrix} H_{xy}(P) & H_{yy}(P) \\ -H_{xy}(P) & -H_{xx}(P) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (3x^2 - 1)(3y^2 - 1) & 6xy(x^2 - 1) \\ -6xy(y^2 - 1) & -(3x^2 - 1)(3y^2 - 1) \end{pmatrix}.$$

Per  $P = P_5$  si ha

$$A(P_5) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix},$$

per  $P = P_9$  si ha

$$A(P_9) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

e per  $P = P_{12}$  si ha

$$A(P_{12}) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Quindi, per tali punti, gli autovalori della matrice del sistema linearizzato sono reali, uno positivo e uno negativo (strettamente). Ne concludiamo che i punti  $P_5, P_9, P_{12}$  sono punti d'equilibrio instabile.

Poiché  $H(x, y)$  è invariante per le trasformazioni

$$\begin{cases} (x, y) \rightarrow (-x, -y), \\ (x, y) \rightarrow (y, x), \end{cases}$$

possiamo concludere che tutti i punti  $P_5, \dots, P_{12}$  sono d'equilibrio instabile.

Per il punto  $P = P_{13}$  troviamo

$$A(P_{13}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

quindi anche  $P_{13}$  è un punto d'equilibrio instabile.

Al contrario per  $P = P_1$  si ha

$$A(P_1) = \begin{pmatrix} 0 & -4/3 \\ 4/3 & 0 \end{pmatrix},$$

che non permette di trarre conclusioni. Analogamente a prima possiamo concludere che lo stesso vale per i punti  $P_2, P_3, P_4$ .

Per discutere la stabilità di tali punti studiamo prima la forma delle curve di livello.

**(1.4)** Le curve di livello

$$\Gamma_0 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : H(x, y) = 0 \right\}$$

sono date dalle sei curve  $\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_6$  definite, rispettivamente, dalle equazioni

$$\begin{cases} \mathcal{C}_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0\}, \\ \mathcal{C}_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\}, \\ \mathcal{C}_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 1\}, \\ \mathcal{C}_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = -1\}, \\ \mathcal{C}_5 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 1\}, \\ \mathcal{C}_6 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = -1\}, \end{cases}$$

che si intersecano nei punti  $P_5, \dots, P_{13}$ . Cfr. la Fig. 1.

Tenendo conto che

$$\begin{aligned} H(x, x) &\geq 0, & H(x, -x) &\leq 0, \\ H(y, 1/2) &\begin{cases} > 0, & \text{se } 1 > y > 0 \text{ o } y < -1, \\ < 0, & \text{altrimenti,} \end{cases} \end{aligned}$$

e dell'invarianza di  $H(x, y)$  per le trasformazioni

$$\begin{cases} (x, y) \rightarrow (-x, -y), \\ (x, y) \rightarrow (y, x), \end{cases}$$

si ottiene che il segno di  $H(x, y)$  è come indicato in Fig. 2.

In particolare possiamo quindi dire che  $P_1$  e  $P_3$  sono punti di massimo per  $H(x, y)$ , mentre  $P_2$  e  $P_4$  sono punti di minimo.

Le curve di livello  $\Gamma_E$ , per  $E \neq 0$ , sono come rappresentate in Fig. 3.

I versi di percorrenza si possono facilmente dedurre dalla forma delle equazioni del moto e sono come indicati in Fig. 3.

**(3) II parte.** Per studiare la stabilità dei punti  $P_1, \dots, P_4$  possiamo applicare il Teorema di Ljapunov, usando come funzioni di Ljapunov, rispettivamente,

$$\begin{cases} W_1(x, y) = -[H(x, y) - H(P_1)], \\ W_2(x, y) = [H(x, y) - H(P_2)], \\ W_3(x, y) = -[H(x, y) - H(P_3)], \\ W_4(x, y) = [H(x, y) - H(P_4)], \end{cases}$$

e concludere che sono punti d'equilibrio stabile. Infatti, per ogni  $j = 1, \dots, 4$ , si ha  $W(P_j) = 0$ , la funzione  $W_j(x, y)$  è strettamente positiva in un intorno del punto  $P_j$  privato del punto stesso e, infine,  $\dot{W}(x, y) = 0$ , essendo  $H(x, y)$ , e quindi  $W(x, y)$ , una costante del moto.

**(1.5)** Si hanno traiettorie periodiche in corrispondenza di dati iniziali  $(\bar{x}, \bar{y})$  tali che

$$\begin{cases} |\bar{x}| < 1, & |\bar{y}| < 1, \\ 0 < H(\bar{x}, \bar{y}) < H(P_1), & 0 > H(\bar{x}, \bar{y}) > H(P_2). \end{cases}$$

Alternativamente possiamo caratterizzare i dati iniziali  $(\bar{x}, \bar{y})$  che generano traiettorie periodiche dando le condizioni

$$\begin{cases} |\bar{x}| < 1, & |\bar{y}| < 1, \\ H(\bar{x}, \bar{y}) \neq 0, \\ (\bar{x}, \bar{y}) \notin \{P_1, P_2, P_3, P_4\}. \end{cases}$$

## ESERCIZIO 2.

**(2.1)** Se  $\mathbf{q}_{O'}(t)$  indica la posizione del punto  $O'$  sull'ellisse al tempo  $t$ , denotiamo con  $\theta(t)$  l'angolo (contato in senso antiorario) che il vettore  $\mathbf{q}_{O'}(t)$  forma con l'asse  $x$ , tale che  $\theta(0) = 0$  (così che  $\mathbf{q}_{O'}(0) = (2, 0, 0)$ ) e con  $\rho(t)$  il modulo del vettore  $\mathbf{q}_{O'}(t)$ , i.e.  $\rho(t) = \|\mathbf{q}_{O'}(t)\|$ . Cfr. Fig. 4.

Ponendo  $\mathbf{q}_{O'}(t) = (x_{O'}(t), y_{O'}(t), z_{O'}(t))$  si ha, in coordinate cartesiane,

$$\frac{x_{O'}^2(t)}{4} + y_{O'}^2(t) = 1, \quad z_{O'}(t) \equiv 0,$$

tenendo conto che  $\mathbf{q}_{O'}$  si trova sull'ellisse; poiché

$$\begin{cases} x_{O'}(t) = \rho(t) \cos \theta(t), \\ y_{O'}(t) = \rho(t) \sin \theta(t), \end{cases}$$

così che

$$\rho^2(t) \left( \frac{\cos^2 \theta(t)}{4} + \sin^2 \theta(t) \right) = 1.$$

Quindi

$$\frac{\rho^2(t)}{4} (1 + 3 \sin^2 \theta(t)) = 1,$$

che, risolta, dà

$$\rho(t) = \frac{2}{\sqrt{1 + 3 \sin^2 \theta(t)}}.$$

Si ha allora

$$\mathbf{q}_{O'} = (\rho(t) \cos \theta(t), \rho(t) \sin \theta(t), 0) = \left( \frac{2 \cos \theta(t)}{\sqrt{1 + 3 \sin^2 \theta(t)}}, \frac{2 \sin \theta(t)}{\sqrt{1 + 3 \sin^2 \theta(t)}}, 0 \right),$$

che permette di esprimere  $\mathbf{q}_{O'}(t)$  in termini di  $\theta(t)$ .

Quindi  $\mathbf{q} = B\mathbf{Q} + \mathbf{r}$ , con

$$B = \begin{pmatrix} \cos \omega t & -\sin \omega t & 0 \\ \sin \omega t & \cos \omega t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

e

$$\mathbf{r} = (\rho(t) \cos \theta(t), \rho(t) \sin \theta(t), 0) = \left( \frac{2 \cos \theta(t)}{\sqrt{1 + 3 \sin^2 \theta(t)}}, \frac{2 \sin \theta(t)}{\sqrt{1 + 3 \sin^2 \theta(t)}}, 0 \right).$$

Possiamo perciò scrivere  $\mathbf{q} = D\mathbf{Q}$ , dove  $D = CB$ , con  $C$  che esprime la traslazione  $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x} + \mathbf{r}$ .

Si noti che

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}} &= (\dot{\rho}(t) \cos \theta(t) - \rho(t) \dot{\theta}(t) \sin \theta(t), \dot{\rho}(t) \sin \theta(t) + \rho(t) \dot{\theta}(t) \cos \theta(t), 0) \\ &= \left( -\frac{8 \sin \theta(t)}{(1 + 3 \sin^2 \theta(t))^{3/2}}, \frac{2 \cos \theta(t)}{(1 + 3 \sin^2 \theta(t))^{3/2}}, 0 \right). \end{aligned}$$

**(2.2)** Si ha

$$\mathbf{Q}(t) = (\xi(t), \eta(t), \zeta(t)), \quad \begin{cases} \xi(t) = vt, \\ \eta(t) = 0, \\ \zeta(t) = 0, \end{cases}$$

e

$$\mathbf{q}(t) = (x(t), y(t), z(t)), \quad \begin{cases} \xi(t) = vt \cos \omega t + \rho(t) \cos \theta(t), \\ \eta(t) = vt \sin \omega t + \rho(t) \sin \theta(t), \\ \zeta(t) = 0. \end{cases}$$

(2.3) Si ha

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{q}} = \begin{pmatrix} v \cos \omega t - v\omega t \sin \omega t + \dot{\rho}(t) \cos \theta(t) - \rho(t)\dot{\theta}(t) \sin \theta(t), \\ v \sin \omega t + v\omega t \cos \omega t + \dot{\rho}(t) \sin \theta(t) + \rho(t)\dot{\theta}(t) \cos \theta(t), 0 \end{pmatrix} .$$

(2.4) Si ha

$$\mathbf{v}_0 = \dot{\mathbf{r}} = \left( \dot{\rho}(t) \cos \theta(t) - \rho(t)\dot{\theta}(t) \sin \theta(t), \dot{\rho}(t) \sin \theta(t) + \rho(t)\dot{\theta}(t) \cos \theta(t), 0 \right) .$$

(2.5) Si ha

$$\mathbf{v}' = B\dot{\mathbf{Q}} = (v \cos \omega t, v \sin \omega t, 0) .$$

(2.6) Si ha

$$\mathbf{v}_T = [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{q} - \mathbf{r}] = (-v\omega t \sin \omega t, v\omega t \cos \omega t, 0) ,$$

dove  $\boldsymbol{\omega} = (0, 0, \omega)$ .

(2.7) Si ha

$$\mathbf{F}_2 = -2 \left[ \boldsymbol{\Omega}, \dot{\mathbf{Q}} \right] = (0, -2\omega v, 0) ,$$

dove  $\boldsymbol{\Omega} = B^{-1}\boldsymbol{\omega} = (0, 0, \omega)$ .

