Corso di laurea in Matematica

Sistemi dinamici – Primo Modulo

Prova d'esame del 06-06-2000

CORREZIONE

---

(1) Si ha

$$\dot{H} = \frac{\partial H}{\partial x}\,\dot{x} + \frac{\partial H}{\partial y}\,\dot{y} = 4x\left(x^2+y^2-2\right)\dot{x} + 4y\left(x^2+y^2-2\right)\dot{y} = -\dot{y}\dot{x} + \dot{x}\dot{y} = 0.$$

Equivalentemente basta notare che si ha

$$\begin{cases} \dot{x} = 4y\left(x^2+y^2-2\right) = \partial H/\partial y, \\ \dot{y} = -4x\left(x^2+y^2-2\right) = -\partial H/\partial x. \end{cases}$$

(2) I punti d'equilibrio sono

$$P_0 = (0,0),$$

e tutti i punti sulla circonferenza $\mathcal{C}_2$ di equazione

$$x^2+y^2=2.$$

(3) Le curve di livello sono le curve

$$\Gamma_E = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;:\; H(x,y)=E\}.$$

L'equazione

$$\begin{aligned} H &= \left(x^2+y^2-1\right)\left(x^2+y^2-3\right) - E \\ &= x^4 + 2x^2\left(y^2-2\right) + \left(y^2-1\right)\left(y^2-3\right) - E = 0 \end{aligned}$$

ha soluzione

$$x^2 = 2-y^2 \pm \sqrt{y^4-4y^2+4-y^4+4y^2-3+E} = 2-y^2 \pm \sqrt{1+E},$$

che definisce le circonferenze

$$x^2+y^2 = 2\pm\sqrt{1+E}.$$

Quindi si deve avere $E \geq -1$; se $E > 3$ solo la determinazione con il segno $+$ va considerata.

Per $E=-1$, si ha una sola circonferenza $\mathcal{C}_2$, di equazione

$$x^2+y^2=2,$$

che corrisponde alle posizioni di equilibrio trovate al punto (2).

Per $E\in(-1,3)$ si hanno due circonferenze. Per $E=0$ esse si riducono alle circonferenze $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_3$, di centro l'origine e di raggio, rispettivamente, $r=1$ e $r=\sqrt{3}$.

Se $E\in(-1,0)$ le due circonferenze hanno raggi r_1 e r_2, tali che $1<r_1<\sqrt{2}<r_2<\sqrt{3}$.

Per $E\in(0,3)$ le due circonferenze hanno raggi r_1 e r_2, tali che $r_1<1$ e $\sqrt{3}<r_2<2$.

Per $E=3$ si ha una circonferenza $\mathcal{C}_4$ di raggio $r=2$, mentre l'altra circonferenza degenera nell'origine P_0.

Infine per $E>3$ si ha una sola circonferenza, esterna alla circonferenza $\mathcal{C}_4$.

I versi di percorrenza si determinano facilmente e sono come rappresentati in Fig. 1.

(4) Il punto d'equlibrio P_0 è stabile, come è facile verificare applicando il Teorema di Lyapunov, con funzione di Lyapunov

$$W(x,y) = H(0,0) - H(x,y) = 3 - H(x,y),$$

e scegliendo un intorno

$$B_1(P_0) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + y^2 < 1\}.$$

Si ha infatti

$$\begin{cases} W(0,0) = 0, \\ W(x,y) - W(0,0) > 0 \qquad \forall (x,y) \in B_1(P_0) \setminus P_0, \\ \dot{W}(x,y) \equiv 0, \end{cases}$$

poiché P_0 è un punto di massimo per la funzione $W(x,y)$ nel dominio $\overline{B_1(P_0)}$ e $W(x,y)$ è una costante del moto.

Per quanto riguarda i punti sulla circonferenza $\mathcal{C}_2$, essi sono tutti instabili, come si può facilmente dimostrare utilizzando il fatto che le curve di livello di $H(x,y)$ sono tutte circonferenze.

Per ogni punto $P \in \mathcal{C}_2$, comunque sia scelto un intorno $B_\varepsilon(P)$, si può scegliere un intorno $B_\delta(P)$, con $\delta \leq \varepsilon$, tale che la traiettoria che parte da un qualsiasi punto $P' \in B_\delta(P)$ esce prima o poi (in un tempo finito) da $B_\varepsilon(P)$. Ved. Fig. 2. Infatti la traiettoria che ha P' come dato iniziale si svolge su una circonferenza di raggio $r = 2 + O(\delta)$, e quindi si allontana da P' lungo tale circonferenza, uscendo in un tempo finito dall'intorno $B_\varepsilon(P)$.

(5) Poiché il moto si svolge sulle circonferenze $x^2 + y^2 = 2 \pm \sqrt{1+E} \equiv R^2$, possiamo riscrivere le equazioni del moto nella forma

$$\begin{cases} \dot{x} = 4y\left(R^2 - 2\right), \\ \dot{y} = -4x\left(R^2 - 2\right), \end{cases}$$

i.e.

$$\begin{cases} \dot{x} = \omega y, \\ \dot{y} = -\omega x, \end{cases}$$

dove $\omega = 4\left(R^2 - 2\right)$.

Se il dato iniziale (x_0, y_0) è tale che $R^2 = 2$ (questo succede se il dato iniziale è sulla circonferenza $\mathcal{C}_2$), allora la soluzione è data da

$$\begin{cases} x(t) = x_0, \\ y(t) = y_0, \end{cases}$$

per ogni $t \in \mathbb{R}$.

Altrimenti si tratta di trovare la soluzione $z(t) = (x(t), y(t))$ del sistema lineare

$$\dot{z} = Az, \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{pmatrix},$$

con dato iniziale $z_0 = (x_0, y_0)$.

Ovviamente se $(x_0, y_0) = P_0$ si trova di nuovo una soluzione banale $(x(t), y(t)) = (0,0)$ per ogni $t \in \mathbb{R}$.

In generale, si trova facilmente che la soluzione (in termini dei dati iniziali) è data da

$$\begin{cases} x(t) = x_0 \cos \omega t + y_0 \sin \omega t, \\ y(t) = -x_0 \sin \omega t + y_0 \cos \omega t. \end{cases}$$

Si può per esempio ragionare come segue. Il polimonio caratteristico della matrice A è dato da

$$\det\left(A - \lambda \mathbb{1}\right) = \lambda^2 + \omega^2,$$

così che gli autovalori sono

$$\lambda_\pm = \pm i\omega,$$

e i corrispondenti autovettori (complessi) sono

$$e_+ = (-i, 1), \qquad e_- = (i, 1).$$

Possiamo quindi scrivere la soluzione nella forma

$$z(t) = e^{At} z_0, \qquad e^{At} = Q^{-1} e^{St} Q,$$

dove

$$e^{St} = \begin{pmatrix} e^{i\omega t} & 0 \\ 0 & e^{-i\omega t} \end{pmatrix}, \qquad Q^{-1} = P^T, \qquad P = \begin{pmatrix} -i & 1 \\ i & 1 \end{pmatrix}.$$

Quindi

$$Q = \frac{1}{2i} \begin{pmatrix} -1 & i \\ 1 & i \end{pmatrix}, \qquad Q^{-1} = \begin{pmatrix} -i & i \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

così che si ottiene

$$\begin{aligned} e^{At} &= \frac{1}{2i} \begin{pmatrix} -i & i \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\omega t} & 0 \\ 0 & e^{-i\omega t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & i \\ 1 & i \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2i} \begin{pmatrix} -i & i \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -e^{i\omega t} & ie^{i\omega t} \\ e^{-i\omega t} & ie^{-i\omega t} \end{pmatrix} = \frac{1}{2i} \begin{pmatrix} ie^{i\omega t} + ie^{-i\omega t} & e^{i\omega t} - e^{-i\omega t} \\ -e^{i\omega t} + e^{-i\omega t} & ie^{i\omega t} + ie^{-i\omega t} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos\omega t & \sin\omega t \\ -\sin\omega t & \cos\omega t \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

che conclude la dimostrazione.