

Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2007/2008

FM1 - Equazioni differenziali e meccanica

PROVA SCRITTA (09-06-2008)

ESERCIZIO 1. [6]

(1.1) [1] Siano $a, x_0 \in \mathbb{R}$. Si risolva l'equazione differenziale $\dot{x} = ax$ in \mathbb{R} con dato iniziale $x(0) = x_0$.

(1.2) [5] Si usi il risultato per trovare la soluzione del sistema di equazioni differenziali lineari in \mathbb{R}^n

$$\dot{x}_k = \sum_{i=1}^n x_i = x_1 + \dots + x_n, \quad k = 1, \dots, n,$$

con dato iniziale $x_k(0) = 1 \forall k = 1, \dots, n$.

ESERCIZIO 2. [4]

(2.1) [1] Sotto quali condizioni il problema di Cauchy ammette soluzione unica?

(2.2) [2] Dimostrare attraverso un esempio in \mathbb{R} che la soluzione può esistere senza essere unica.

(2.3) [1] Dare un esempio in cui la soluzione non è unica in \mathbb{R}^n con $n > 1$.

ESERCIZIO 3. [10] Sia dato il sistema gradiente in \mathbb{R}^3

$$\dot{x} = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad \dot{y} = -\frac{\partial V}{\partial y}, \quad \dot{z} = -\frac{\partial V}{\partial z}, \quad V(x, y, z) = x^2 + y^2 - 2y + z^4.$$

(3.1) [1] Determinare i punti d'equilibrio.

(3.2) [3] Studiarne la stabilità.

(3.3) [3] Determinare esplicitamente le traiettorie del sistema.

(3.4) [3] Stimare il bacino d'attrazione di eventuali punti d'equilibrio asintoticamente stabile utilizzando il teorema di Barbašin-Krasovskij.

ESERCIZIO 4. [12] Si consideri il sistema meccanico conservativo che descrive un punto materiale di massa $m = 1$, sottoposto alla forza

$$F(x) = 4x^3 + 2\alpha x^2 + 4x,$$

con $\alpha \in \mathbb{R}$. Al variare del parametro α rispondere alle seguenti domande.

(4.1) [1] Scrivere l'equazione del moto e le equazioni che definiscono il sistema dinamico associato.

(4.2) [3] Determinare i punti d'equilibrio del sistema dinamico e discuterne la stabilità.

(4.3) [3] Studiare il grafico dell'energia potenziale $V(x)$ corrispondente alla forza $F(x)$.

(4.4) [3] Discutere qualitativamente il moto nel piano $(x, y) = (x, \dot{x})$.

(4.5) [2] Dimostrare che per $\alpha = -5$ la traiettoria con condizioni iniziali $(x(0), y(0)) = (1, 0)$ non è periodica.

ESERCIZIO 5. [4] Discutere in dettaglio la conservazione del momento angolare nel problema dei due corpi.

ESERCIZIO 6. [16] Un cilindro omogeneo, di raggio R , altezza h e massa M , gira intorno al suo asse di simmetria con velocità angolare costante ω . Siano A e B le due basi del cilindro. Una formica si muove sulla superficie laterale del cilindro, procedendo lungo una generatrice, partendo in corrispondenza della base A e mantenendo una velocità di intensità costante v .

(6.1) [2] Determinare il tempo necessario perché la formica raggiunga la base B cilindro.

(6.2) [2] Dire quanti giri ha effettuato il cilindro quando la formica ha raggiunto la base B .

(6.3) [4] Determinare la traiettoria percorsa dalla formica in un sistema di riferimento fisso κ la cui origine coincida con il centro della base A del cilindro e il cui asse z sia diretto lungo il suo asse di simmetria.

(6.4) [2] Determinare la forza di Coriolis che agisce sulla formica (sia m la massa della formica).

(6.5) [4] Calcolare l'energia cinetica del sistema, indicando con I_3 il momento principale di inerzia del cilindro rispetto al suo asse di simmetria.

(6.6) [2] Calcolare I_3 .