Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2009/2010

FM1 - Equazioni differenziali e meccanica

Prova scritta (09-09-2010)

Esercizio 1. [6] Si consideri il sistema di equazioni differenziali lineari in $\mathbb{R}^n$

$$\begin{cases} \dot{x}_k = -x_k + x_k^2\left(1 + x_{k+1}^2\right), & k \text{ dispari}, \\ \dot{x}_k = -2x_k + x_k^3, & k \text{ pari}. \end{cases}$$

con $n \in 2\mathbb{N}$.
(1.1) [2] Si dimostri che l'origine è un punto d'equilibrio asintoticamente stabile.
(1.3) [4] Se ne stimi il bacino d'attrazione.

Esercizio 2. [12] Dato il sistema dinamico $\dot{x} = f(x)$ in $\mathbb{R}^n$, con $f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, sia $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tale che $f(x_0) \neq 0$ e sia $\pi = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, f(x_0)\rangle = 0\}$, dove $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota il prodotto scalare standard in $\mathbb{R}^n$.
(2.1) [6] Si dimostri che esiste un intorno B del punto x_0 tale che tutte le traiettorie con dati iniziali $x \in B$ intersecano π in un tempo $\tau(x)$, tale che la funzione $x \to \tau(x)$ sia regolare.
(2.2) [2] Si può scegliere B così che tutte le traiettorie con dati iniziali in B escano da B in un tempo finito?
(2.3) [4] Si può scegliere B in modo tale che tutte le traiettorie con dati iniziali $x \in B$ intersecano π in un tempo $\tau(x)$ (eventualmente infinito) e B contenga punti d'equilibrio? Se sì, la funzione $\tau(x)$ è ancora regolare?

Esercizio 3. [12] Si consideri il sistema dinamico planare

$$\begin{cases} \dot{x} = x\left(x^2 + 3y^2 - 1\right), \\ \dot{y} = -y\left(3x^2 + y^2 - 1\right). \end{cases}$$

(3.1) [1] Si dimostri che esiste una costante del moto $H(x, y)$ e la si determini in modo che si abbia $H(0, 0) = 0$.
(3.2) [2] Si determinino i punti d'equilibrio del sistema dinamico.
(3.3) [3] Se ne discuta la stabilità.
(3.4) [2] Si studino le curve di livello della funzione $H(x, y)$.
(3.5) [2] Si studino qualitativamente le traiettorie del sistema, indicando in particolare i versi di percorrenza.
(3.6) [1] Si individuino i dati iniziali che generano traiettorie periodiche.
(3.7) [1] Si individuino i dati iniziali che generano traiettorie asintotiche.

Esercizio 4. [4] Siano $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$ due vettori in $\mathbb{R}^3$ e B una matrice ortogonale 3×3. Si dimostri che $[B\mathbf{X}, B\mathbf{Y}] = B[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]$, dove $[\cdot, \cdot]$ denota il prodotto vettoriale in $\mathbb{R}^3$.

Esercizio 5. [10] Si consideri un sistema rigido costituito da un guscio sferico omogeneo di massa m e di raggio interno $a > 0$ e raggio esterno $b > a$.
(5.1) [2] Si determinino gli assi d'inerzia del sistema.
(5.2) [4] Si calcolino i momenti principali d'inerzia.
(5.3) [1] Si dimostri che nel limite $a \to 0$ si ottengono i momenti principali d'inerzia di una sfera omogenea di massa m e di raggio b.
(5.4) [3] Si calcoli il momento d'inerzia del sistema rispetto a un asse qualsiasi tangente alla superficie del guscio esterno.

Esercizio 6. [4] Si enunci e dimostri la terza legge di Keplero, assumendo le prime due, definendo con cura tutte le grandezze coinvolte.