Corso di laurea in Matematica

Sistemi dinamici – Primo Modulo

Prova d'esame del 27-06-2000

CORREZIONE

---

(1) Si verifica facilmente che

$$\begin{aligned}\frac{\partial H}{\partial x} &= 4xy\left(x^2+y^2-2\right),\\ \frac{\partial H}{\partial y} &= \left(x^2+y^2-1\right)\left(x^2+y^2-3\right)+4y^2\left(x^2+y^2-2\right);\end{aligned}$$

quindi

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = \dot{H} = \frac{\partial H}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial H}{\partial y}\dot{y} = 0.$$

(2) I punti d'equilibrio sono i seguenti:

$$\begin{aligned}&P_1 = \left(0, \sqrt{\frac{6+\sqrt{21}}{5}}\right), \qquad P_2 = \left(0, \sqrt{\frac{6-\sqrt{21}}{5}}\right),\\ &P_3 = \left(0, -\sqrt{\frac{6-\sqrt{21}}{5}}\right), \qquad P_4 = \left(0, -\sqrt{\frac{6+\sqrt{21}}{5}}\right),\\ &P_5 = \left(\sqrt{3}, 0\right), \qquad P_6 = (1,0), \qquad P_7 = (-1,0), \qquad P_8 = \left(-\sqrt{3}, 0\right).\end{aligned}$$

(3) Le curve di livello sono le curve

$$\Gamma_E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ H(x,y) = E\}.$$

Si vede subito che per $E = 0$ si ha

$$\Gamma_0 = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2 \cup \mathcal{C}_3,$$

dove

$$\begin{aligned}\mathcal{C}_1 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2+y^2 = 1\},\\ \mathcal{C}_2 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2+y^2 = 3\},\\ \mathcal{C}_3 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ y = 0\}.\end{aligned}$$

Sulla curva $\mathcal{C}_3$ si ha $\dot{y} = 0$, mentre

$$\begin{cases}\dot{x} > 0, & \text{se } |x| < 1 \text{ o } |x| > 3,\\ \dot{x} < 0, & \text{se } 1 < |x| < 3,\end{cases}$$

Sulla curva $\mathcal{C}_1$ si ha

$$\begin{cases}\dot{x} = -4y^2 < 0,\\ \dot{y} = 4xy,\end{cases}$$

mentre sulla curva $\mathcal{C}_2$ si ha

$$\begin{cases} \dot{x} = 4y^2 > 0, \\ \dot{y} = -4xy, \end{cases}$$

così che sulla curva $\mathcal{C}_1$ ci si muove da sinistra a destra nel semipiano $y > 0$ e da destra a sinistra nel semipiano $y < 0$; allo stesso modo sulla curva $\mathcal{C}_2$ ci si muove da sinistra a destra nel semipiano $y < 0$ e da destra a sinistra nel semipiano $y > 0$. Cfr. la Figura 1.

Le altre curve di livello sono come rappresentate in Figura 2; i versi di percorrenza si ottengono per continuità, tenendo conto dei versi di percorrenza sulla curva di livello Γ_0.

Si noti che $H(x,y) = E$ si può scrivere, per $y \neq 0$, come

$$x^4 + 2\left(y^2 - 2\right)x^2 + \left(y^2 - 1\right)\left(y^2 - 3\right) - \frac{E}{y} = 0,$$

che, risolta, dà

$$\begin{aligned} x^2 &= -\left(y^2 - 2\right) \pm \sqrt{\left(y^2 - 2\right)^2 - \left(y^2 - 1\right)\left(y^2 - 3\right) + \frac{E}{y}}, \\ &= \left(2 - y^2\right) \pm \sqrt{1 + \frac{E}{y}}. \end{aligned}$$

In particolare se $E = 0$ ritroviamo $x^2 + y^2 = 2 \pm 1$. In generale si ha quindi

$$x = \pm\sqrt{2 - y^2 \pm \sqrt{1 + \frac{E}{y}}}.$$

Poiché

$$H(x,y) = H(-x,y) = -H(x,-y),$$

è sufficiente studiare le curve di livello nel quadrante $x \geq 0, y \geq 0$, *i.e.*

$$x_\pm = \sqrt{2 - y^2 \pm \sqrt{1 + \frac{E}{y}}}, \qquad y \geq 0.$$

Si può allora studiare $x = x(y)$, e si trova la situazione rappresentata in Figura 2.

Per esempio, se si fissa $E > 0$ e si prende la determinazione x_+, si ha

$$\frac{\mathrm{dx}_+}{\mathrm{dy}} = -\frac{1}{2\sqrt{2 - y^2 \pm \sqrt{1 + \frac{E}{y}}}}\left(2y + \frac{E}{y^2\sqrt{1 + \frac{E}{y}}}\right) < 0,$$

quindi x_+ è una funzione decrescente in y: si ha $x_+ \to \infty$ per $y \to 0$, quindi per y che cresce x aumenta fino a raggiungere il valore massimo $x_+(0)$. E così via per gli altri casi.

(4) I punti d'equilibrio P_1, P_2, P_3 e P_4 sono stabili, come è facile verificare applicando il Teorema di Lyapunov nel modo seguente.

Si noti innanzitutto che $H(x,y)$ è positiva nella regione tratteggiata di Figura 3, e negativa nella regione bianca. Quindi P_2 e P_4 sono punti di massimo, mentre P_1 e P_3 sono punti di minimo.

Per $P_0 \in \{P_2, P_4\}$, si può allora scegliere come funzione di Lyapunov

$$W(x,y) = H(P_0) - H(x,y),$$

e fissare un intorno sufficientemente piccolo $B(P_0)$ di P_0, così che

$$\begin{cases} W(P_0) = 0, \\ W(x,y) - W(0,0) > 0 \qquad \forall (x,y) \in B(P_0) \setminus P_0, \\ \dot{W}(x,y) \equiv 0, \end{cases}$$

poiché P_0 è un punto di massimo per la funzione $W(x,y)$ nel dominio $\overline{B(P_0)}$ e $W(x,y)$ è una costante del moto.

Analogamente si ragiona per $P_0 \in \{P_1, P_3\}$, prendendo come funzione di Lyapunov

$$W(x,y) = H(x,y) - H(P_0).$$

Per quanto riguarda i punti P_5, P_6, P_7 e P_8, essi sono tutti instabili, come si può facilemente dimostrare utilizzando i risultati del punto precedente, in particolare i versi di percorrenza dei rami della curva di livello Γ_0 passanti per tali punti d'equilibrio: infatti se vede che ogni intorno di tali punti d'equilibrio, per quanto piccolo, contiene dati iniziali le cui traiettorie escono in un tempo finito dall'intorno.

Alternativamente si può linearizzare il sistema nell'intorno di ciascun punto $P_0 \in \{P_5, P_6, P_7, P_8\}$, e verificare che, posto $P_0 = (x_0, y_0)$, almeno un autovalore della corrispondente matrice

$$A(P_0) = \begin{pmatrix} 4x_0\left(x_0^2 + 3y_0^2 - 2\right) & 4y_0\left(3x_0^2 + 5y_0^2 - 6\right) \\ -4y_0\left(3x_0^2 + y_0^2 - 2\right) & -4x_0\left(x_0^2 + 3y_0^2 - 2\right) \end{pmatrix}$$

è positivo. Si ha infatti, tenendo conto che $y_0 = 0$,

$$A(P_0) = \begin{pmatrix} 4x_0\left(x_0^2 - 2\right) & 0 \\ 0 & -4x_0\left(x_0^2 - 2\right) \end{pmatrix},$$

così che i corrispondenti autovalori sono

$$\lambda_\pm = \pm 4x_0\left(x_0^2 - 2\right),$$

quindi sono uno positivo e uno negativo.

(5) Se $P_0 \equiv (x(0), y(0)) = (0,1)$ si ha allora $P_0 \in \mathcal{C}_1 \subset \Gamma_0$: quindi $x^2(t) + y^2(t) = 1$ per ogni $t \in \mathbb{R}$. Le equazioni del moto diventano quindi

$$\begin{cases} \dot{x} = -4y^2 = -4\left(1 - x^2\right), \\ \dot{y} = 4xy. \end{cases}$$

La prima si può risolvere esplicitamente per separazione di variabili, e dà

$$\int_0^{x(t)} \frac{\mathrm{d}x}{x^2 - 1} = 4\int_0^t \mathrm{d}t = 4t.$$

Scrivendo

$$\frac{1}{x^2 - 1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right),$$

si ottiene quindi

$$\int_0^{x(t)} \frac{\mathrm{d}x}{x-1} - \int_0^{x(t)} \frac{\mathrm{d}x}{x+1} = 8\int_0^t \mathrm{d}t = 4t,$$

che, integrando, implica

$$\log\left|\frac{x(t) - 1}{x(t) + 1}\right| = 8t,$$

ovvero, utilizzando il fatto che $|x(t)| \leq 1$ per ogni $t \in \mathbb{R}$,

$$\log \frac{1 - x(t)}{1 + x(t)} = 8t,$$

che, risolta, dà

$$x(t) = \frac{1 - e^{8t}}{1 + e^{8t}}.$$

La soluzione sarà quindi

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1 - e^{8t}}{1 + e^{8t}}, \\ y(t) &= 1 - \left(\frac{1 - e^{8t}}{1 + e^{8t}} \right)^2. \end{aligned}$$

In particolare si verifica immediatamente che la condizione iniziale è verificata; inoltre

$$\lim_{t \to \infty} x(t) = -1, \qquad \lim_{t \to -\infty} x(t) = 1, \qquad \lim_{t \to \pm\infty} x(t) = 0.$$