Corso di laurea in Matematica

Sistemi dinamici – Primo Modulo

Prova d'esame 05-09-2000

CORREZIONE

Esercizio 1.

Il polinomio caratteristico è

$$p(\lambda) = (1-\lambda)\,(-1-\lambda) - 3 = \lambda^2 - 4,$$

così che gli autovalori di A sono: $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = -2$.

I corrispondenti autovettori sono

$$\begin{cases} \lambda_1 = 2 & \rightarrow \qquad v_1 = (3,1), \\ \lambda_2 = -2 & \rightarrow \qquad v_2 = (-1,1); \end{cases}$$

infatti le equazioni che bisogna risolvere per determinarne le componenti (x,y) dell'autovettore corrispondente all'autovalore λ sono

$$\begin{cases} (1-\lambda)\,x + 3y = 0, \\ x - (1+\lambda)\,y = 0. \end{cases}$$

Quindi

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix}, \qquad P = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

se $\{e_1, e_2\}$ è la base standard in cui l'operatore lineare che definisce il sistema dinamico è rappresentato dalla matrice A.

Si ha quindi

$$Q^{-1} = P^T = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad Q = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Quindi, se poniamo

$$e^{Dt} \equiv \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{pmatrix},$$

abbiamo

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} &= Q^{-1} e^{Dt} Q \begin{pmatrix} x_1(0) \\ \bar{x}_2(0) \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{-2t} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3e^{2t} - e^{-2t} \\ e^{2t} + e^{-2t} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

che dà

$$\begin{cases} x_1(t) = \left(3e^{2t} - e^{-2t}\right)/2 = e^{2t} + \sinh 2t, \\ x_2(t) = \left(e^{2t} + e^{-2t}\right)/2 = \cosh 2t. \end{cases}$$

Esercizio 2.

(2.1) Scrivendo $\dot{x} = \partial H(x,y)/\partial y$ e $\dot{y} = -\partial H(x,y)/\partial x$, integrando la prima equazione del sistema rispetto a y, si ottiene

$$H(x,y) = y^2 - y \sin x + c_1(x),$$

dove $c_1(x)$ è una funzione arbitraria della variabile x, mentre, integrando la seconda equazione rispetto a x, si ottiene

$$H(x,y) = y^2 - y\sin x + c_2(y),$$

dove $c_2(y)$ è una funzione arbitraria della variabile y, quindi si ha

$$H(x,y) = y^2 - y\sin x + C = y\,(y - \sin x)\,,$$

dove la costante arbitraria C è nulla poiché $H(0,0) = 0$.

(2.2) Le curve di livello Γ_E sono definite da

$$\Gamma_E = \big\{(x,y) \in \mathbb{T} \times \mathbb{R} \,:\, H(x,y) = E\big\}\,.$$

Quindi $\Gamma_0 = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$, dove

$$\mathcal{C}_1 = \big\{(x,y) \in \mathbb{T} \times \mathbb{R} \,:\, y = 0\big\}\,,$$
$$\mathcal{C}_2 = \big\{(x,y) \in \mathbb{T} \times \mathbb{R} \,:\, y = \sin x\big\}\,.$$

Le altre curve di livello sono come rappresentate in Figura 1, come è facile verificare.

(2.3) Si ha $\dot{x} = 0$ se $2y = \sin x$. Poiché $\dot{y} = 0$ implica $y = 0$ oppure $\cos x = 0$, *i.e.* $x = \pm\pi/2$, sono possibili i casi seguenti: se $y = 0$ allora $\sin x = 0$, *i.e.* $x = 0, \pi$, mentre se $x = \pm\pi/2$ allora $2y = \pm 1$, *i.e.* $y = \pm 1/2$, rispettivamente.

I punti d'equilibrio, per $x \in (-\pi, \pi]$, sono quindi

$$P_1 = (0,0), \qquad P_2 = (\pi, 0), \qquad P_3 = (\pi/2, 1/2), \qquad P_4 = (-\pi/2, -1/2).$$

(2.4) Il sistema linearizzato intorno al punto d'equilibrio P_1 è dato da

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}, \qquad A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

se $\mathbf{x} = (x,y)$. Quindi gli autovalori di A sono ± 1, da cui segue che P_1 è un punto d'equilibrio instabile poiché la matrice A ha un autovalore positivo.

Analogamente si discute la stabilità del punto d'equilibrio P_2. Il sistema linearizzato intorno a P_2 è dato da

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}, \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

così che di nuovo gli autovalori di A sono ± 1: quindi anche P_2 è un punto d'equilibrio instabile.

La stabilità di P_3 e P_4 si discute utilizzando il teorema di Lyapunov. Si consideri per esempio P_3. Si ha $H(P_3) = -1/4$: poiché $H(x,y) = 0$ per $(x,y) \in \Gamma_0$, segue dal teorema di Weierstrass che P_3 è un punto di minimo per $H(x,y)$ nel dominio chiuso $\overline{D}$, dove D è la regione aperta racchiusa tra la curva $\mathcal{C}_1$ e la curva $\mathcal{C}_2$ e contenente il punto d'equlibrio P_3. Si può quindi utilizzare $W(x,y) = H(x,y) + 1/4$ come funzione di Lyapunov. Se $B \subset D$ è un intorno con centro il punto P_3, risulta allora: (1) $W(P_3) = 0$ e $W(x,y) > 0$ $\forall (x,y) \in B \setminus \{P_3\}$, e (2) $\dot{W}(x,y) \equiv 0$. Le ipotesi del teorema di Lyapunov sono quindi soddisfatte: possiamo concludere che il punto P_3 è un punto d'equilibrio stabile.

Analogamente si conclude che P_4 è un punto d'equilibrio stabile.

In coclusione i punti d'equilibrio P_1 e P_2 sono instabili, mentre i punti d'equilibrio P_3 e P_4 sono stabili.

(2.5) Il dato iniziale $(\pi/2, 1/3)$ è compreso nella regione D (con le notazioni al punto precedente). Quindi la traiettoria che si origina da esso è periodica (per un Teorema che afferma che, per sistemi che ammettono costanti del moto che non siano identicamente costanti su alcun aperto, tutte le traiettorie che si originano da dati iniziali P contenuti in una regione aperta racchiusa da curve di livello e contenente solo un punto d'equilibrio stabile P_0 sono periodiche, purché $P \neq P_0$).

ESERCIZIO 3.

(3.1) Nel sistema κ il punto O' ha coordinate

$$\mathbf{q}_{O'} = (t\cos t, t\sin t, 0) \ .$$

Si ha quindi

$$\mathbf{q} = D\mathbf{Q} = CB\mathbf{Q} = B\mathbf{Q} + \mathbf{r} \ ,$$

con

$$\mathbf{r} = (t\cos t, t\sin t, 0)$$

e

$$B = \begin{pmatrix} \cos\theta(t) & -\sin\theta(t) & 0 \\ \sin\theta(t) & \cos\theta(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \ , \qquad \theta(t) = t \ .$$

Quindi la trasformazione rigida D: $K \to \kappa$ è data dalla composizione della rotazione B con la traslazione C, definita da $C\mathbf{x} = \mathbf{x} + \mathbf{r}$.

(3.2) Scriviamo $\mathbf{q} = (x, y, z)$ e $\mathbf{Q} = (\xi, \eta, \zeta)$. Si ha quindi

$$\mathbf{Q}(t) = \begin{cases} \xi(t) = t \ , \\ \eta(t) = 0 \ , \\ \zeta(t) = 0 \ , \end{cases}$$

mentre

$$\mathbf{q}(t) = D\mathbf{Q}(t) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t\cos t \\ t\sin t \\ 0 \end{pmatrix} \ ,$$

quindi

$$\mathbf{q}(t) = \begin{cases} x(t) = 2t\cos t \ , \\ y(t) = 2t\sin t \ , \\ z(t) = 0 \ . \end{cases}$$

(3.3) La velocità assoluta $\mathbf{v}$ è data da

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{q}} \ .$$

Quindi si ha

$$\mathbf{v} = (2\cos t - 2t\sin t, 2\sin t + 2t\cos t, 0) \ .$$

(3.4) La velocità relativa $\mathbf{v}'$ è data da

$$\mathbf{v}' = B\dot{\mathbf{Q}} \ ,$$

dove

$$\dot{\mathbf{Q}} = (1, 0, 0) \ .$$

Quindi si ha

$$\mathbf{v}' = (\cos t, \sin t, 0) \ .$$

(3.5) La componente traslatoria della velocità di trascinamento $\mathbf{v}_0$ è data da

$$\mathbf{v}_0 = \dot{\mathbf{r}} \ .$$

Quindi

$$\mathbf{v}_0 = (\cos t - t\sin t, \sin t + t\cos t, 0) \ .$$

(3.6) La componente rotatoria della velocità di trascinamento $\mathbf{v}_T$ è data da

$$\mathbf{v}_T = [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{q} - \mathbf{r}] \ ,$$

dove

$$\boldsymbol{\omega} = (0, 0, \omega) \ , \qquad \omega = 1 \ .$$

Quindi, tenuto conto che

$$\mathbf{q} - \mathbf{r} = (t\cos t, t\sin t, 0) \ ,$$

si ha

$$\mathbf{v}_T = (-t\sin t, t\cos t, 0) \ .$$

Si può facilmente verificare che l'identità $\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_T$ è soddisfatta.

(3.7) La forza di Coriolis $\mathbf{F}_2$ è data da

$$\mathbf{F}_2 = -2\left[\boldsymbol{\Omega}, \dot{\mathbf{Q}}\right] \ ,$$

dove $\boldsymbol{\Omega} = B\boldsymbol{\Omega} = (0, 0, \omega) = (0, 0, 1)$. Quindi

$$\mathbf{F}_2 = -2(0, 1, 0) = (0, -2, 0) \ .$$

(3.8) La forza centrifuga $\mathbf{F}_3$ è data da

$$\mathbf{F}_3 = -\left[\boldsymbol{\Omega}, [\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{Q}]\right] \ .$$

Poiché

$$[\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{Q}] = (0, t, 0) \ ,$$

si ha quindi

$$\mathbf{F}_3 = (t, 0, 0) \ .$$

(3.9) Si ha $z(t) \equiv 0$, e $x^2(t) + y^2(t) = 4t^2$, quindi il punto materiale attraversa la circonferenza $\mathcal{C}$ all'istante t_0 tale che $4t_0^2 = 10^2 = 100$, che dà $t_0 = 5$.