

Corso di laurea in Matematica
Sistemi dinamici – Primo Modulo

PROVA D'ESAME 23-01-01

ESERCIZIO 1. Sia dato il sistema dinamico planare

$$\begin{cases} \dot{x} = 2y(1+x^4)^{-1}, \\ \dot{y} = 4x^3(1+y^2)(1+x^4)^{-2}. \end{cases}$$

- (1.1) Determinare una costante del moto $H(x, y)$ tale che $H(0, 0) = 1$.
- (1.2) Determinare le curve di livello di $H(x, y)$.
- (1.3) Determinare i punti d'equilibrio.
- (1.4) Discuterne la stabilità.
- (1.5) Verificare che non esistono traiettorie periodiche.

ESERCIZIO 2. Dato un sistema di riferimento $\kappa = Oxyz$ (sistema assoluto), si consideri anche un sistema di riferimento mobile $K = O'\xi\eta\zeta$ (sistema relativo), tale che l'asse ζ di K coincide con l'asse z di κ e K ruota intorno all'asse $\zeta = z$ con velocità angolare costante ω . I due sistemi κ e K coincidono all'istante iniziale $t = 0$.

Un punto materiale P di massa $m = 1$ si muove lungo l'asse ξ sottoposto all'azione di una molla con costante elastica λ^2 (così che se \mathbf{r} è lo spostamento di P rispetto a $O \equiv O'$ la forza di richiamo è data da $-\lambda^2\mathbf{r}$). All'istante iniziale $t = 0$ il punto materiale ha velocità nulla.

- (2.1) Scrivere la trasformazione rigida $D: K \rightarrow \kappa$ come composizione di una traslazione C con una rotazione B , *i.e.* $D = CB$, e determinare C e B .
- (2.2) Scrivere l'equazione del moto nel sistema di riferimento mobile K . [Poiché il punto materiale è costretto a muoversi lungo l'asse ξ , qualsiasi componente della forza \mathbf{F}_{TOT} non diretta lungo ξ è bilanciata da una corrispondente reazione vincolare e quindi non interviene nell'equazione del moto, in modo tale che le coordinate del punto materiale P lungo gli assi η e ζ sono identicamente nulle].
- (2.3) Risolvere l'equazione del moto nel sistema K e determinare la traiettoria $\mathbf{Q}(t)$ in tale sistema, al variare del parametro ω .
- (2.4) Dimostrare che esiste un valore di ω per il quale il punto materiale P risulta fermo nel sistema di riferimento K .
- (2.5) [FACOLTATIVO.] Discutere sotto quali condizioni su ω la soluzione $\mathbf{q}(t)$ descrive un moto periodico nel sistema di riferimento fisso κ .