Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2008/2009

FM1 - Equazioni differenziali e meccanica

Prova scritta (11-06-2009)

Esercizio 1. [18] Si consideri il sistema meccanico conservativo che descrive un punto materiale di massa $m = 1$, sottoposto alla forza di energia potenziale

$$V(x) = \mathrm{e}^{-x^2} - \alpha\,\mathrm{e}^{-2x^2} + \mathrm{e}^{-3x^2}, \qquad \alpha \in \mathbb{R}.$$

(1.1) [1] Scrivere le equazioni che definiscono il sistema dinamico associato.
(1.2) [3] Per $\alpha = 2$, determinare i punti d'equilibrio del sistema dinamico e discuterne la stabilità.
(1.3) [3] Per $\alpha = 2$ studiare il grafico dell'energia potenziale $V(x)$.
(1.4) [3] Per $\alpha = 2$ discutere qualitativamente il moto nel piano $(x, y) = (x, \dot{x})$.
(1.5) [2] Discutere come cambiano il grafico di $V(x)$ e l'analisi qualitativa del moto per $\alpha \leq 0$ e $\alpha > 2$.
(1.6) [6] Lo stesso del punto precedente al variare di $\alpha \in (0, 2)$.

Esercizio 2. [6] Sia $n \geq 2$. Si consideri il sistema di equazioni differenziali lineari

$$\dot{x}_1 = x_1, \qquad \dot{x}_k = x_{k-1}, \qquad k = 2, \ldots, n.$$

con condizioni iniziali $(x_1(0), \ldots, x_n(0)) = (\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)$.
(2.1) [1] Si dimostri che $x_1(t) = \mathrm{e}^t \bar{x}_1$.
(2.2) [3] Si dimostri per induzione che

$$x_k(t) = \mathrm{e}^t \bar{x}_1 + \sum_{p=0}^{k-2} \frac{t^p}{p!} \Big(\bar{x}_{k-p} - \bar{x}_1 \Big), \qquad k = 2, \ldots, n.$$

(2.3) [1] Se $x = (x_1, \ldots, x_n)$ si determini la matrice A tale che il sistema dato abbia la forma $\dot{x} = Ax$.
(2.4) [1] Determinare gli autovalori di A.

Esercizio 3. [4] Si consideri il sistema costituito da un punto materiale di massa m in $\mathbb{R}^3$, sottoposto ai vincoli:

$$\begin{cases} G_1(x, y, z) = z - \big(x^2 + y^2\big) = 0, \\ G_2(x, y, z) = z + y - 1 = 0, \end{cases}$$

Discutere se i due vincoli sono regolari e indipendenti.

Esercizio 4. [6] Sia $P \subset \mathbb{R}^n$ un insieme compatto positivamente invariante per il sistema dinamico $\dot{x} = f(x)$, con $f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. Sia $x_0 \in \mathrm{int}(P)$ un punto d'equilibrio. Assumendo che esista una funzione $W \in C^1(P, \mathbb{R})$ tale che $W(x_0) = 0$, $W(x) > 0$ per $x \in P \setminus \{x_0\}$ e $\dot{W}(x) < 0$ per $x \in P$, si dimostri che x_0 è attrattivo e P è contenuto nel suo bacino d'attrazione.

Esercizio 5. [10] Dato un sistema di riferimento $\kappa = Oxyz$ (sistema assoluto), sia $K = O'\xi\eta\zeta$ un sistema di riferimento mobile (sistema relativo), la cui origine O' si muova nel piano (x, y) lungo la guida di equazione $y = x + \sin x$ in modo tale che si abbia $x_{O'}(t) = t$. L'asse ζ è parallelo all'asse z, mentre l'asse ξ si mantiene tangente alla guida. Un punto materiale P di massa $m = 1$ si muove nel sistema di riferimento K lungo una guida parabolica di equazione $\eta = \xi^2$ con legge oraria $\xi(t) = \alpha \sin t$, $\alpha > 0$.
(5.1) [2] Determinare la trasformazione rigida $D\colon K \to \kappa$ come composizione di una traslazione C con una rotazione B, e determinare C e B.
(5.2) [1] Determinare la velocità assoluta del punto P.
(5.3) [1] Determinarne la velocità relativa.
(5.4) [1] Determinare la componente traslatoria della velocità di trascinamento.
(5.5) [1] Determinare la componente rotatoria della velocità di trascinamento.
(5.6) [2] Dimostrare che si può fissare $\alpha < \alpha_0$ in modo tale che il moto nel piano (x, y) sia monotono nella direzione x.
(5.7) [2] Dare una stima di α_0.

Esercizio 6. [4] Sia ∇ l'operatore gradiente in $\mathbb{R}^2$. Si dimostri che in coordinate polari $\nabla = \left(\dfrac{\partial}{\partial \rho}, \dfrac{1}{\rho} \dfrac{\partial}{\partial \theta} \right)$.