Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2008/2009

FM1 - Equazioni differenziali e meccanica

Prova scritta (11-09-2009)

Esercizio 1. [8] Si consideri il sistema dinamico descritto dall'equazione

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} + x^n = 0,$$

con n dispari e $\gamma > 0$.
(1.1) [3] Si dimostri che il punto $(x, \dot{x}) = (0, 0)$ è asintoticamente stabile.
(1.2) [2] Si dimostri che tutte le traiettorie tendono al punto $(0, 0)$ per $t \to \infty$.
(1.3) [3] Si calcoli esplicitamente la soluzione per $n = 1$.

Esercizio 2. [10] Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(2.1) [4] Si calcoli $\exp A$.
(2.2) [2] Si trovino le soluzioni dell'equazione $F_A(x) = \exp A - xA = \mathbb{1}$.
(2.3) [2] Si calcoli $\exp B$, se $\lambda \in \mathbb{R}$ e $B = \lambda A$; determinare se possibile λ tale che $F_B(x) = \mathbb{1}$ ammetta soluzione $x = 1$.
(2.4) [2] Si consideri, più in generale, la matrice $n \times n$ di elementi $A_{ij} = 1$ e si determini la matrice $\exp A$ al variare di n.

Esercizio 3. [10] Si consideri il sistema dinamico planare

$$\begin{cases} \dot{x} = 2y - \mathrm{e}^{x} - 4\mathrm{e}^{-x} - 5, \\ \dot{y} = \mathrm{e}^{-x}\left(\mathrm{e}^{2x} - 4\right)(y - 5). \end{cases}$$

(3.1) [1] Si dimostri che la funzione $H(x, y) = \left(y - \mathrm{e}^{x} - 4\mathrm{e}^{-x}\right)(y - 5)$ è una costante del moto.
(3.2) [2] Si determinino i punti d'equilibrio.
(3.3) [3] Se ne discuta la stabilità.
(3.4) [4] Si studino qualitativamente le traiettorie del sistema.

Esercizio 4. [5] Si enunci e dimostri il teorema del prolungamento per equazioni differenziali ordinarie del primo ordine.

Esercizio 5. [8] Dato un sistema di riferimento $\kappa = Oxyz$ (sistema assoluto), sia $K = O'\xi\eta\zeta$ un sistema di riferimento mobile (sistema relativo), la cui origine O' si muova lungo l'asse y con velocità costante $v = 1$. L'asse ζ si mantiene parallelo all'asse z, mentre il piano (ξ, η) ruota con velocità angolare costante ω intorno all'asse ζ. All'istante iniziale O e O' coincidono. Un punto materiale P di massa m si muove nel sistema di riferimento K con legge oraria $t \to \mathbf{Q}(t) = (\xi(t), \eta(t), 0)$.
(5.1) [2] Determinare la trasformazione rigida $D \colon K \to \kappa$ come composizione di una traslazione C con una rotazione B.
(5.2) [2] Determinare $\mathbf{Q}(t)$ in modo tale che il punto P sia fermo nell'origine nel sistema di riferimento assoluto.
(5.3) [2] Che curva descrive P nel sistema di riferimento mobile?
(5.4) [2] Calcolare la forza centrifuga e la forza di Coriolis che agiscono sul punto P.

Esercizio 6. [7] Si determinino gli assi principali d'inerzia di una lastra omogenea quadrata di massa m e lato ℓ, e si calcolino i corrispondenti momenti principali d'inerzia.