

Corso di laurea in Matematica  
Sistemi dinamici – Primo Modulo

PROVA D'ESAME 23-01-01

CORREZIONE

---

ESERCIZIO 1.

(1.1) Proviamo a scrivere il sistema nella forma

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \frac{2y}{1+x^4} = \frac{\partial H}{\partial y}, \\ \dot{y} &= \frac{4x^3(1+y^2)}{(1+x^4)^2} = -\frac{\partial H}{\partial x},\end{aligned}$$

e vediamo se esiste una funzione  $H = H(x, y)$  per la quale tali relazioni siano soddisfatte. Se tale funzione esiste, essa è per costruzione una costante del moto: infatti risulta

$$\dot{H} = \frac{\partial H}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial H}{\partial y} \dot{y} = \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial H}{\partial y} = 0.$$

Integrando la prima equazione rispetto a  $y$  si ottiene

$$H(x, y) = \frac{y^2}{1+x^4} + c_1(x),$$

per qualche funzione  $c_1(x)$  (indipendente da  $y$ ).

Analogamente integrando la seconda equazione (cambiata di segno) rispetto a  $x$  e tenendo conto che

$$\int dx \frac{4x^3}{(1+x^4)^2} = \int dx^4 \frac{1}{(1+x^4)^2} = \int d(1+x^4) \frac{1}{(1+x^4)^2} = -\frac{1}{1+x^4},$$

si ottiene

$$H(x, y) = \frac{1+y^2}{1+x^4} + c_2(y),$$

dove la funzione  $c_2(y)$  è indipendente da  $x$ .

Imponendo che le due espressioni per  $H(x, y)$  siano uguali si ottiene quindi

$$H(x, y) = \frac{1+y^2}{1+x^4} + c,$$

per qualche costante  $c$ , e imponendo che si abbia  $H(0, 0) = 1$  si ottiene  $c = 0$ , *i.e.*

$$H(x, y) = \frac{1+y^2}{1+x^4}.$$

(1.2) Le curve di livello della funzione  $H(x, y)$  sono le curve

$$\Gamma_E = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : H(x, y) = E \right\};$$

ovviamente si ha  $H(x, y) = E$  se

$$y^2 + 1 = E(1 + x^4),$$

quindi

$$\Gamma_E = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = y_{\pm}(x) \right\},$$

dove

$$y_{\pm}(x) = \pm \sqrt{E(1 + x^4) - 1} = \pm \sqrt{(E - 1) + Ex^4}.$$

Fissato un valore  $E \in \mathbb{R}$  sono possibili solo i valori  $x$  tali che risulti

$$(E - 1) + Ex^4 \geq 0.$$

Poiché  $x^4 \geq 0$ , non sono possibili valori  $E \leq 0$ .

Se  $0 < E < 1$  allora  $E - 1 < 0$  e quindi deve essere

$$x^4 \geq \frac{1 - E}{E}, \quad \text{quindi} \quad |x| \geq x_0 \equiv \left( \frac{1 - E}{E} \right)^{1/4}.$$

Se  $E \geq 1$  invece si ha  $E - 1 \geq 0$  e quindi  $x$  può assumere ogni valore.

In particolare se  $E = 1$  si ottiene

$$y_{\pm}(x) = \sqrt{x^4} = x^2,$$

così che possiamo concludere che la curva di livello  $\Gamma_1$  consiste nell'unione delle due parabole  $\mathcal{C}_{\pm}$ , dove

$$\mathcal{C}_{\pm} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = \pm x^2 \right\}.$$

Per studiare le altre curve di livello si tenga conto che esse dipendono solo da  $x^2$  e  $y^2$ . Basta quindi studiare  $x > 0$  e  $y = y_+(x)$ , e le parti restanti delle curve di livello si ottengono per simmetria.

In generale, per ogni  $E > 0$ , si ha

$$\begin{aligned} \frac{dy_+}{dx} &= \frac{2Ex^3}{\sqrt{(E - 1) + Ex^4}}, \\ \frac{d^2y_+}{dx^2} &= \frac{4Ex^2}{[(E - 1) + Ex^4]^{3/2}} [3E - 3 + Ex^4], \end{aligned}$$

così che si vede che  $dy_+/dx \geq 0$  per ogni  $x \geq 0$  (ed è nulla se e solo se  $x = 0$ ), mentre, per quanto riguarda la derivata seconda, se  $E > 1$  si ha  $dy_+/dx \geq 0$  per ogni  $x \geq 0$ , mentre, se  $E < 1$ , esiste un valore  $x_1$  tale che

$$\frac{d^2y_+}{dx^2} \begin{cases} > 0, & \text{se } x > x_1, \\ < 0, & \text{se } x < x_1; \end{cases}$$

si trova facilmente che si ha

$$x_1 = \left( 3 \frac{1 - E}{E} \right)^{1/4} > x_0.$$

Il punto  $x_1$  costituisce dunque un punto di flesso per la funzione  $y = y_+(x)$ .

In conclusione, nel semipiano superiore, la situazione è la seguente. Per  $E > 1$  le curve di livello  $\Gamma_E$  sono definite per ogni  $x \in \mathbb{R}$ , sono crescenti per  $x > 0$  e decrescenti per  $x < 0$ , e sono convesse per ogni  $x \in \mathbb{R}$ . Per  $0 < E < 1$  le curve di livello  $\Gamma_E$  sono definite solo per  $|x| \geq x_0$ , sono crescenti per  $x \geq x_0$  e decrescenti per  $x \leq -x_0$ , sono concave per  $x_0 \leq |x| < x_1$  e convesse per  $|x| > x_1$ .

Nel semipiano inferiore le curve di livello si ottengono semplicemente per riflessione rispetto all'asse  $x$ .

Per quanto riguarda i versi di percorrenza, si tenga conto che  $\dot{x} > 0$  se e solo se  $y > 0$ : quindi ci si muove verso destra nel semipiano superiore e verso sinistra nel semipiano inferiore.

La situazione è come rappresentata in Fig. 1.

**(1.3)** I punti d'equilibrio sono i punti  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  in cui si annulla il campo vettoriale. Si vede immediatamente che si ha  $\dot{x} = 0$  se e solo se  $y = 0$  e  $\dot{y} = 0$  se e solo se  $x = 0$ . Esiste quindi un solo punto d'equilibrio, dato dall'origine  $(0, 0)$ .

**(1.4)** Lo studio del sistema linearizzato non dà informazioni; infatti la matrice del sistema linearizzato è data da

$$\begin{aligned} A(x, y) &= \begin{pmatrix} [\partial^2 H / \partial x \partial y](x, y) & [\partial^2 H / \partial y^2](x, y) \\ -[\partial^2 H / \partial x^2](x, y) & -[\partial^2 H / \partial x \partial y](x, y) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -(8x^3y)/(1+x^4)^2 & 2/(1+x^4) \\ 4x^2(3-5x^4)(1+y^2)/(1+x^4)^3 & (8x^3y)/(1+x^4)^2 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

così che si ha

$$A(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

D'altra parte lo studio delle curve di livello mostra che l'origine è un punto d'equilibrio instabile. Infatti comunque si scelga un intorno dell'origine esso conterrà dati iniziali di traiettorie che si allontanano indefinitamente dall'origine.

**(1.5)** Di nuovo il fatto che non esistono traiettorie periodiche discende dallo studio delle curve di livello: infatti nessuna curva di livello contiene componenti chiuse, perciò non sono possibili traiettorie periodiche.

## ESERCIZIO 2.

**(2.1)** Il sistema  $K$  sta semplicemente ruotando con velocità angolare costante  $\omega$  rispetto all'asse  $\zeta$ , che coincide con l'asse  $z$  del sistema fisso  $\kappa$ .

Se  $\theta(t)$  indica l'angolo di rotazione di  $\kappa$  rispetto a  $K$ , si ha quindi  $\theta(t) = \omega t$  (tenendo conto che  $\theta(0) = 0$ ). Quindi si ha  $D = CB$ , dove  $C = \mathbb{1}$  (non c'è traslazione poiché  $O'$  coincide con  $O$ ), e

$$B = \begin{pmatrix} \cos \theta(t) & -\sin \theta(t) & 0 \\ \sin \theta(t) & \cos \theta(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \theta(t) = \omega t.$$

**(2.2)** Scriviamo  $\mathbf{q} = (x, y, z)$  e  $\mathbf{Q} = (\xi, \eta, \zeta)$ . Nel sistema  $K$  le coordinate  $\eta, \zeta$  sono identicamente nulle, così che  $\mathbf{Q} = (\xi, 0, 0)$ ; la componente  $\xi$  si ottiene risolvendo l'equazione del moto nel sistema di riferimento mobile  $K$ .

In tale sistema di riferimento la forza è data da

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{\text{TOT}} &= \mathbf{F} + \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3, \\ \mathbf{F} &= B\mathbf{f}, \\ \mathbf{F}_1 &= -[\dot{\boldsymbol{\Omega}}, \mathbf{Q}], \\ \mathbf{F}_2 &= -2[\boldsymbol{\Omega}, \dot{\mathbf{Q}}], \\ \mathbf{F}_3 &= -[\boldsymbol{\Omega}, [\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{Q}]], \end{aligned}$$

dove  $\boldsymbol{\Omega} = B(0, 0, \omega) = (0, 0, \omega)$  è il vettore di rotazione visto come vettore di  $K$ .

Il termine  $\mathbf{F}$  esprime la forza effettivamente agente sul punto materiale  $P$ , vista come vettore di  $K$ . Si vede immediatamente che, poiché  $\mathbf{f} = (-\lambda^2 x, -\lambda^2 y, 0)$ , si ha

$$\mathbf{F} = (-\lambda^2 \xi, 0, 0).$$

Poiché  $\omega$  è costante si ha  $\mathbf{F}_1 = 0$ .

Inoltre si ottiene immediatamente, per calcolo esplicito,

$$\mathbf{F}_2 = (0, -2\omega\dot{\xi}, 0),$$

che spinge solo nella direzione  $\eta$ : quindi non ha componente lungo la direzione  $\xi$ .

Analogamente si trova

$$\mathbf{F}_3 = (\omega^2\xi, 0, 0),$$

che quindi ha solo la componente lungo la direzione  $\xi$ .

La situazione è rappresentata in Fig. 2.

In conclusione la prima componente del vettore  $\mathbf{F}_{\text{TOT}}$  (i.e. la componente di  $\mathbf{F}_{\text{TOT}}$  nella direzione  $\xi$ ) è data da

$$(\mathbf{F}_{\text{TOT}})_\xi = (\alpha\xi, 0, 0), \quad \alpha = \omega^2 - \lambda^2.$$

**(2.3)** Dalla precedente discussione si trova che  $\xi = \xi(t)$  deve verificare l'equazione differenziale

$$\ddot{\xi} = \alpha\xi, \quad \alpha = \omega^2 - \lambda^2.$$

Se  $\alpha < 0$  si avrà quindi

$$\xi(t) = a \cos \sqrt{-\alpha}t + b \sin \sqrt{-\alpha}t,$$

dove  $a, b$  si ottengono tenendo conto dei dati iniziali; se  $\xi_0$  indica il valore della componente  $\xi(t)$  all'istante iniziale  $t = 0$ , si ha quindi  $\xi(0) = \xi_0$  e  $\dot{\xi}(0) = 0$  (per ipotesi), da cui si ricava

$$\xi(t) = \xi_0 \cos \sqrt{-\alpha}t.$$

Se  $\alpha > 0$  si avrà invece

$$\xi(t) = ae^{\sqrt{\alpha}t} + be^{-\sqrt{\alpha}t},$$

dove  $a, b$  si ottengono tenendo conto dei dati iniziali; con le stesse notazioni di prima si ricava

$$\xi(t) = \xi_0 \cosh \sqrt{\alpha}t, \quad \cosh x = \frac{1}{2} (e^x + e^{-x}).$$

Se infine  $\alpha = 0$  si ottiene subito

$$\xi(t) = \xi_0 \quad \forall t,$$

sempre tenendo conto delle condizioni iniziali.

In conclusione abbiamo

$$\mathbf{Q}(t) = \begin{cases} \xi(t) = \xi_0 \cos \sqrt{-\alpha}t, \\ \eta(t) = 0, \\ \zeta(t) = 0, \end{cases}$$

se  $\alpha = \omega^2 - \lambda^2 > 0$ ,

$$\mathbf{Q}(t) = \begin{cases} \xi(t) = \xi_0 \cosh \sqrt{\alpha}t, \\ \eta(t) = 0, \\ \zeta(t) = 0, \end{cases}$$

se  $\alpha < 0$ , e

$$\mathbf{Q}(t) = \begin{cases} \xi(t) = \xi_0, \\ \eta(t) = 0, \\ \zeta(t) = 0, \end{cases}$$

se  $\alpha = 0$ .

(2.4) Dalla precedente discussione si trova che il punto materiale rimane fermo in  $K$  se  $K$  ruota con velocità angolare  $\omega = \lambda$ , così che  $\alpha = 0$ .

(2.5) Nel sistema di riferimento  $\kappa$  le coordinate del punto materiale  $P$  sono date da

$$\mathbf{q}(t) = B\mathbf{Q}(t) = \begin{cases} x(t) = \xi(t) \cos \theta(t), \\ y(t) = \xi(t) \sin \theta(t), \\ z(t) = 0. \end{cases}$$

Il moto sarà periodico se esiste  $T > 0$  tale che  $\mathbf{q}(T) = \mathbf{q}(0)$ .

Questo in particolare è possibile solo se  $\|\mathbf{q}(T)\| = \|\mathbf{q}(0)\|$ . Si ha, tenendo conto che  $B$  è una rotazione,

$$\|\mathbf{q}(t)\| = \|B\mathbf{Q}(t)\| = \|\mathbf{Q}(t)\| = |\xi(t)|.$$

Se  $\alpha > 0$  si ha che  $\xi(t)$  è una funzione crescente, e tende all'infinito per  $t \rightarrow \infty$ , quindi anche  $\|\mathbf{q}(t)\|$  cresce nel tempo: quindi se  $\alpha > 0$  non sono possibili moti periodici.

Se  $\alpha = 0$  allora  $\xi(t) = \xi(0) \equiv \xi_0$ , e il punto materiale  $P$  semplicemente ruota nel piano  $(x, y)$  con velocità angolare costante  $\omega = \lambda$ , descrivendo una circonferenza: quindi il moto corrispondente è periodico.

Se  $\alpha < 0$ , la funzione  $\xi(t)$  oscilla intorno a  $\xi = 0$ : il moto di  $\xi(t)$  è quindi un moto armonico con periodo  $\tau$ , dove  $\tau = 2\pi/\sqrt{-\alpha}$  è il più piccolo istante positivo tale che  $\xi(\tau) = \xi(0)$ . Il moto nel sistema di riferimento  $\kappa$  sarà quindi periodico se e solo se esistono due interi  $M, N$  tali che

$$\theta(M\tau) = 2\pi N;$$

infatti se tale condizione è verificata al tempo  $t = M\tau$  si avrà  $\xi(M\tau) = \xi(0)$  e  $\theta(M\tau) = 0 \pmod{2\pi}$ , quindi al tempo  $t = M\tau$  il punto materiale è tornato alla sua posizione iniziale.

Poiché  $\theta(t) = \omega t$ , la condizione sopra si legge

$$\omega M\tau = \omega M \frac{2\pi}{\sqrt{-\alpha}} = 2\pi N,$$

da cui si ottiene

$$\frac{\omega}{\sqrt{-\alpha}} = \sqrt{\frac{\omega^2}{\lambda^2 - \omega^2}} = \frac{N}{M};$$

quindi, in conclusione, se  $\alpha < 0$  il moto è periodico se e solo se  $\lambda > \omega$  e la quantità  $\sqrt{\omega^2/(\lambda^2 - \omega^2)}$  è razionale.

