

Corso di laurea in Matematica
Sistemi dinamici – Primo Modulo

PROVA D'ESAME 19-02-01

ESERCIZIO 1. Si consideri il sistema di equazioni differenziali lineari

$$\dot{x} = Ax, \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix},$$

con condizioni iniziali $x(0) = (1, 0, 0)$. Si trovi la soluzione $x(t)$.

ESERCIZIO 2. Sia dato il sistema dinamico planare

$$\begin{cases} \dot{x} = 4y(y^2 - x^2 - 1), \\ \dot{y} = -4x(x^2 - y^2 - 1). \end{cases}$$

(2.1) Dimostrare che la funzione

$$H(x, y) = \left[(y + 1)^2 - x^2 \right] \left[(y - 1)^2 - x^2 \right]$$

costituisce una costante del moto.

(2.2) Determinare i punti d'equilibrio.

(2.3) Discuterne la stabilità.

(2.4) Determinare la curva di livello $H(x, y) = 0$ e discuterne il verso di percorrenza.

(2.5) Discutere qualitativamente le altre curve di livello e discuterne i versi di percorrenza.

(2.6) Determinare i dati iniziali che danno origine a traiettorie periodiche.

(2.7) [FACOLTATIVO: Esprimere il periodo di ogni traiettoria periodica come integrale definito.]