Corso di laurea in Matematica

Sistemi dinamici – Primo Modulo

Prova d'esame 19-02-01

CORREZIONE

Esercizio 1.

I Metodo

Il polinomio caratteristico dell'operatore lineare A è

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= (2-\lambda)\left[(3-\lambda)^2+1\right] = (2-\lambda)\left(\lambda^2-6\lambda+10\right) \\ &= (2-\lambda)(\lambda-3-i)(\lambda-3+i) \end{aligned}$$

così che lo spettro di A è costituito dagli autovalori

$$\lambda_1 = 2, \qquad \lambda_2 = 3+i, \qquad \lambda_3 = 3-i:$$

abbiamo quindi tre autovalori distinti, uno reale ($\lambda_1 = 2$) e due complessi coniugati ($\lambda_2 = 3+i$ e $\lambda_3 = \overline{\lambda}_2 = 3-i$).

Possiamo scrivere $E = \mathbb{R}^3$ come somma diretta

$$\begin{aligned} &E = E_1 \oplus E_2 \oplus E_3 \\ &E_1 = \ker(A - 2\mathbb{1}), \qquad E_2 = \ker(A-(3+i)\mathbb{1}), \qquad E_3 = \ker(A-(3-i)\mathbb{1}), \end{aligned}$$

Cerchiamo una base $\{v_1, v_2, v_3\}$ in E costituita dagli autovettori di A: in tale base l'operatore rappresentato da A nella base standard sarà rappresentato dalla matrice diagonale

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3+i & 0 \\ 0 & 0 & 3-i \end{pmatrix}.$$

Le componenti dell'autovettore v_1 si determinano cercando le soluzioni (x,y,z) non banali dell'equazione

$$(A-2\mathbb{1})\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0,$$

che fornisce le due relazioni

$$\begin{cases} -2x+y+z=0, \\ -y+z=0, \end{cases}$$

che, per esempio, ammettono soluzione

$$v_1 = (1,1,1).$$

Le componenti dell'autovettore v_2 si determinano cercando le soluzioni (x,y,z) non banali dell'equazione

$$(A-(3+i)\mathbb{1})\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1-i & 0 & 0 \\ -2 & -i & 1 \\ 0 & -1 & -i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0,$$

che fornisce le relazioni

$$\begin{cases} x = 0, \\ -iy + z = 0, \\ -y - iz = 0, \end{cases}$$

così che una possibile soluzione è

$$v_2 = (0, 1, i) .$$

Analogamente si trova per l'autovettore v_3 l'espressione

$$v_3 = (0, 1, -i) ,$$

che si può anche ricavare, più semplicemente, notando che deve essere $v_3 = \overline{v}_2$.

In conclusione si ha

$$\begin{cases} \lambda_1 = 2 \\ \lambda_2 = 3 + i \\ \lambda_3 = 3 - i \end{cases} \qquad \to \qquad \begin{aligned} v_1 &= (1, 1, 1), \\ v_2 &= (0, 1, i), \\ v_3 &= (0, 1, -i). \end{aligned}$$

Si ha quindi

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}, \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & i \\ 0 & 1 & -i \end{pmatrix},$$

se $\{e_1, e_2, e_3\}$ è la base standard in cui l'operatore lineare che definisce il sistema dinamico è rappresentato dalla matrice A.

Siano y le coordinate nella base definita dagli autovettori $\{v_1, v_2, v_3\}$. Si ha allora

$$y = Qx, \qquad Q^{-1} = P^T.$$

Quindi

$$Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -i \end{pmatrix}.$$

così che $\det Q = -2i$. Si ha quindi

$$Q = \frac{1}{2i} \begin{pmatrix} 2i & 0 & 0 \\ -1 - i & i & 1 \\ 1 - i & i & -1 \end{pmatrix},$$

come è immediato verificare.

Si può anche facilmente verificare che risulta

$$B = QAQ^{-1} = \frac{1}{2i} \begin{pmatrix} 2i & 0 & 0 \\ -1 - i & i & 1 \\ 1 - i & i & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 + i & 0 \\ 0 & 0 & 3 - i \end{pmatrix},$$

come deve essere.

Nelle coordinate y il sistema diventa

$$\dot{y} = By, \qquad y \in \mathbb{R}^3, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 + i & 0 \\ 0 & 0 & 3 - i \end{pmatrix},$$

con condizioni iniziali $y(0) = Qx(0)$, dove

$$\begin{cases} y_1(0) = x_1(0) = 1, \\ y_2(0) = \left[-(1 + i)x_1(0) + ix_2(0) + x_3(0) \right] / (2i) = -(1 + i)/(2i), \\ y_3(0) = \left[(1 - i)x_1(0) + ix_2(0) - x_3(0) \right] / (2i) = (1 - i)/(2i); \end{cases}$$

la soluzione di tale sistema di equazioni si calcola immediatamente ed è data da

$$\begin{cases} y_1(t) = e^{2t} y_1(0) = e^{2t}, \\ y_2(t) = e^{3t} e^{it} y_2(0) = -e^{3t} e^{it} (1+i)/(2i), \\ y_3(t) = e^{3t} e^{-it} y_3(0) = e^{3t} e^{-it} (1-i)/(2i), \end{cases}$$

che, espressa nelle coordinate x, diventa $x(t) = Q^{-1} y(t)$: quindi si ottiene

$$\begin{aligned} x_1(t) &= y_1(t) = e^{2t}, \\ x_2(t) &= y_1(t) + y_2(t) + y_3(t) = e^{2t} - e^{3t} e^{it} \frac{1+i}{2i} + e^{3t} e^{-it} \frac{1-i}{2i}, \\ x_3(t) &= y_1(t) + i y_2(t) - i y_3(t) = e^{2t} - e^{3t} e^{it} \frac{1+i}{2} - e^{3t} e^{-it} \frac{1-i}{2}. \end{aligned}$$

Poiché la soluzione $x(t)$ è reale, possiamo riscrivere le espressioni sopra tenendo conto che

$$\begin{aligned} \cos x &= \frac{1}{2} \left(e^{ix} + e^{-ix} \right), \\ \sin x &= \frac{1}{2i} \left(e^{ix} - e^{-ix} \right), \end{aligned}$$

per ogni $x \in \mathbb{R}$; troviamo quindi

$$\begin{aligned} x_2(t) &= e^{2t} + \frac{1}{2i} e^{3t} e^{it} (-1-i) + \frac{1}{2i} e^{3t} e^{-it} (1-i) = e^{2t} - \frac{1}{2i} e^{3t} e^{it} - \frac{1}{2} e^{3t} e^{it} + \frac{1}{2i} e^{3t} e^{-it} - \frac{1}{2} e^{3t} e^{-it} \\ &= e^{2t} - e^{3t} \frac{1}{2i} \left(e^{it} - e^{-it} \right) - e^{3t} \frac{1}{2} \left(e^{it} + e^{-it} \right) = e^{2t} - e^{3t} \left(\sin t + \cos t \right), \end{aligned}$$

e, analogamente,

$$\begin{aligned} x_3(t) &= e^{2t} + \frac{1}{2} e^{3t} e^{it} (-1-i) - \frac{1}{2} e^{3t} e^{-it} (1-i) = e^{2t} - \frac{1}{2} e^{3t} e^{it} + \frac{1}{2i} e^{3t} e^{it} - \frac{1}{2} e^{3t} e^{-it} - \frac{1}{2i} e^{3t} e^{-it} \\ &= e^{2t} - e^{3t} \frac{1}{2i} \left(e^{it} - e^{-it} \right) - e^{3t} \frac{1}{2} \left(e^{it} + e^{-it} \right) = e^{2t} + e^{3t} \left(\sin t - \cos t \right). \end{aligned}$$

In conclusione la soluzione è data da

$$\begin{cases} x_1(t) = e^{2t}, \\ x_2(t) = e^{2t} - e^{3t} \left(\sin t + \cos t \right), \\ x_3(t) = e^{2t} + e^{3t} \left(\sin t - \cos t \right). \end{cases}$$

II Metodo

Altrimenti, una volta determinati gli autovalori e gli autovettori di A, invece che nella base $\{v_1, v_2, v_3\}$ si può lavorare nella base $\{v_1, v, u\}$, se poniamo $v_2 = u + iv$, quindi con

$$v = (0, 0, 1), \qquad u = (0, 1, 0),$$

possiamo allora scrivere

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v \\ u \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}, \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

se $\{e_1, e_2, e_3\}$ è la base standard in cui l'operatore lineare che definisce il sistema dinamico è rappresentato dalla matrice A.

Siano y le coordinate nella base $\{v_1, v, u\}$. Si ha allora

$$y = Qx, \qquad Q^{-1} = P^T.$$

Quindi

$$Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

così che $\det Q = -1$. Si trova quindi

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

come è immediato verificare.

Si può anche facilmente verificare che risulta

$$B = QAQ^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Nelle coordinate y il sistema diventa

$$\dot{y} = By, \qquad y \in \mathbb{R}^3, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$

con condizioni iniziali $y_0 \equiv y(0) = Qx_0$, dove

$$\begin{cases} y_{01} = x_{01} = 1, \\ y_{02} = -x_{01} + x_{03} = -1, \\ y_{03} = -x_{01} + x_{02} = -1; \end{cases}$$

la soluzione nelle variabili y si calcola immediatamente ed è data da

$$\begin{cases} y_1(t) = e^{2t} y_{01} = e^{2t}, \\ y_2(t) = e^{3t} \left(y_{02} \cos t - y_{03} \sin t \right) = e^{3t} \left(-\cos t + \sin t \right), \\ y_3(t) = e^{3t} \left(y_{02} \sin t + y_{03} \cos t \right) = e^{t} \left(-\sin t - \cos t \right), \end{cases}$$

che, espressa nelle coordinate x, diventa $x(t) = Q^{-1} y(t)$: quindi si ottiene

$$\begin{aligned} x_1(t) &= y_1(t) = e^{2t}, \\ x_2(t) &= y_1(t) + y_3(t) = e^{2t} - e^{3t} \left(\cos t + \sin t \right), \\ x_3(t) &= y_1(t) + y_2(t) = e^{2t} + e^{3t} \left(\sin t - \cos t \right). \end{aligned}$$

III Metodo

Trovato lo spettro di A, si cerca una soluzione della forma

$$\begin{aligned} x(t) &= a e^{2t} + b e^{3t} e^{it} + c e^{3t} e^{-t} \\ &= a e^{2t} + 2 \mathrm{Re}\,(b)\, e^{3t} \cos t - 2 \mathrm{Im}\,(b)\, e^{3t} \sin t, \end{aligned}$$

con $a = (a_1, a_2, a_3)$, $b = (b_1, b_2, b_3)$ e $c = (c_1, c_2, c_3)$ da determinarsi imponenendo che $x(t)$ risolva l'equazione $\dot{x}(t) = Ax(t)$ e soddisfi la condizione iniziale $x(0) = x_0$. Nel passare dalla prima alla seconda espressione, si è utilizzato il fatto che si deve avere $c = \overline{b}$, dal momento che la soluzione deve essere reale.

Poiché si ha

$$\dot{x}(t) = 2ae^{2t} + b\,(3+i)\,e^{3t+it} + \overline{b}\,(3-i)\,e^{3t-it},$$

l'equazione $\dot{x}(t) = Ax(t)$ dà

$$\begin{aligned}
2a_1e^{2t} + (3+i)\,b_1e^{3t+it} + (3-i)\,c_1e^{3t-it} &= 2a_1e^{2t} + 2b_1e^{3t+it} + 2c_1e^{3t-it},\\
2a_2e^{2t} + (3+i)\,b_2e^{3t+it} + (3-i)\,c_2e^{3t-it} &= (-2a_1+3a_2+a_3)\,e^{2t}\\
&\quad + (-2b_1+3b_2+b_3)\,e^{3t+it} + (-2c_1+3c_2+c_3)\,e^{3t-it},\\
2a_3e^{2t} + (3+i)\,b_3e^{3t+it} + (3-i)\,c_3e^{3t-it} &= (-a_2+3a_3)\,e^{2t} + (-b_2+3b_3)\,e^{3t+it} + (-c_2+3c_3)\,e^{3t-it},
\end{aligned}$$

che implica le 9 equazioni

$$\begin{cases}
a_1 = a_1,\\
b_1\,(3+i) = 2b_1,\\
c_1\,(3-i) = 2c_1,\\
2a_2 = -2a_1 + 3a_2 + a_3,\\
b_2\,(3+i) = -2b_1 + 3b_2 + b_3,\\
c_2\,(3-i) = -2c_1 + 3c_2 + c_3,\\
2a_3 = -a_2 + 3a_3,\\
b_3\,(3+i) = -b_2 + 3b_3,\\
c_3\,(3-i) = -c_2 + 3c_3,
\end{cases}$$

di cui si possono considerare solo le 6 per a e b (tenendo conto che quelle per c sono semplicemente le complesse coniugate di quelle per b):

$$\begin{cases}
a_1 = a_1,\\
b_1\,(3+i) = 2b_1,\\
2a_2 = -2a_1 + 3a_2 + a_3,\\
b_2\,(3+i) = -2b_1 + 3b_2 + b_3,\\
2a_3 = -a_2 + 3a_3,\\
b_3\,(3+i) = -b_2 + 3b_3.
\end{cases}$$

Otteniamo quindi

$$\begin{cases}
-2a_1 + a_2 + a_3 = 0,\\
b_1 = 0,\\
-a_2 + a_3 = 0,\\
ib_2 = -2b_1 + b_3,\\
ib_3 = -b_2,
\end{cases}$$

così che si ha

$$a_1 = a_2 = a_3, \qquad b_1 = 0, \qquad b_2 = -ib_3;$$

possiamo quindi scrivere

$$\begin{cases}
a = (a_1, a_2, a_3) = (\alpha, \alpha, \alpha),\\
b = (b_1, b_2, b_3) = (0, -i\beta, \beta),\\
c = (c_1, c_2, c_3) = (0, i\overline{\beta}, \overline{\beta}),
\end{cases}$$

con $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{C}$ da determinarsi imponendo che siano soddisfatte le condizioni iniziali.

Si ha dunque

$$\begin{cases}
\alpha = x_{01} = 1,\\
\alpha - i\left(\beta - \overline{\beta}\right) = x_{02} = 0,\\
\alpha + \left(\beta + \overline{\beta}\right) = x_{03} = 0,
\end{cases}$$

dove

$$\beta + \overline{\beta} = 2\mathrm{Re}\,(\beta), \qquad i\left(\beta - \overline{\beta}\right) = -2\mathrm{Im}\,(\beta),$$

così che otteniamo

$$\alpha = 1, \qquad \operatorname{Re}\beta = -\frac{1}{2}, \qquad \operatorname{Im}\beta = -\frac{1}{2},$$

e quindi possiamo scrivere

$$\begin{cases} 2\operatorname{Re} b = (0, 2\operatorname{Im}(\beta), 2\operatorname{Re}(\beta)) = (0, -1, -1)\,, \\ 2\operatorname{Im} b = (0, -2\operatorname{Re}(\beta), 2\operatorname{Im}(\beta)) = (0, 1, -1)\,. \end{cases}$$

In conclusione otteniamo

$$\begin{aligned} x_1(t) &= a_1 e^{2t} + 2\operatorname{Re}(b_1)\, e^{3t} \cos t - 2\operatorname{Im}(b_1)\, e^{3t} \sin t = e^{2t}, \\ x_2(t) &= a_2 e^{2t} + 2\operatorname{Re}(b_2)\, e^{3t} \cos t - 2\operatorname{Im}(b_2)\, e^{3t} \sin t = e^{2t} - e^{3t}(\sin t + \cos t)\,, \\ x_3(t) &= a_3 e^{2t} + 2\operatorname{Re}(b_3)\, e^{3t} \cos t - 2\operatorname{Im}(b_3)\, e^{3t} \sin t = e^{2t} + e^{3t}(\sin t - \cos t)\,. \end{aligned}$$

<u>Esercizio 2.</u>

(2.1) Si ha

$$\begin{aligned} H(x,y) &= \left[(y+1)^2 - x^2\right]\left[(y-1)^2 - x^2\right] \\ &= y^4 + x^4 - 2y^2 - 2x^2 - 2x^2y^2 + 1, \end{aligned}$$

quindi

$$\begin{aligned} H_x &\equiv \frac{\partial H}{\partial x} = 4x^3 - 4xy^2 - 4x = 4x\left(x^2 - y^2 - 1\right), \\ H_y &\equiv \frac{\partial H}{\partial y} = 4y^3 - 4yx^2 - 4y = 4y\left(y^2 - x^2 - 1\right), \end{aligned}$$

così che si ha

$$\dot{H} = \frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = H_x \dot{x} + H_y \dot{y} = H_x H_y - H_y H_x = 0.$$

(2.2) Si ha $\dot{x} = 0$ se $y = 0$ oppure $y^2 - x^2 - 1 = 0$, e si ha $\dot{y} = 0$ se $x = 0$ oppure $x^2 - y^2 - 1 = 0$. Se $y = 0$ si deve avere $x^2 - y^2 - 1 = x^2 - 1 = 0$, quindi $x = \pm 1$, mentre se $x = 0$ si deve avere $y^2 - x^2 - 1 = y^2 - 1 = 0$, quindi $y = \pm 1$; non esistono altre soluzioni. In conclusione si hanno i 5 punti d'equilibrio:

$$P_0 = (0,0), \qquad P_1 = (1,0), \qquad P_2 = (-1,0), \qquad P_3 = (0,1), \qquad P_4 = (0,-1).$$

(2.3) *Parte I.* Per discutere la stabilità dei punti d'equilibrio calcoliamo la matrice hessiana di H. Si ha

$$\mathcal{H}(x,y) = \begin{pmatrix} H_{xx}(x,y) & H_{xy}(x,y) \\ H_{yx}(x,y) & H_{yy}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12x^2 - 4y^2 - 4 & -8xy \\ -8xy & 12y^2 - 4x^2 - 4 \end{pmatrix},$$

così che la matrice del sistema linearizzato nell'intorno di un punto d'equilibrio di coordinate (x,y) è data da

$$A(x,y) = \begin{pmatrix} H_{xy}(x,y) & H_{yy}(x,y) \\ -H_{xx}(x,y) & -H_{xy}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8xy & 12y^2 - 4x^2 - 4 \\ -12x^2 + 4y^2 + 4 & 8xy \end{pmatrix}.$$

Quindi:

$$\begin{aligned} &A(P_0) = A(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A(P_1) = A(1,0) = \begin{pmatrix} 0 & -8 \\ -8 & 0 \end{pmatrix}, \\ &A(P_2) = A(-1,0) = \begin{pmatrix} 0 & -8 \\ -8 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A(P_3) = A(0,1) = \begin{pmatrix} 0 & 8 \\ 8 & 0 \end{pmatrix}, \\ &A(P_4) = A(0,-1) = \begin{pmatrix} 0 & 8 \\ 8 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

così che si vede che gli autovalori sono $\lambda = \pm 4i$ per P_0, e $\lambda = \pm 4\sqrt{6}$ per P_1, P_2, P_3 e P_4.

Possiamo quindi concludere che i punti P_1, P_2, P_3 e P_4 sono instabili.

Per determinare la stabilità di P_0 studiamo prima la curva di livello $H(x,y) = 0$.

(2.4) *Parte I.* La curva di livello

$$\Gamma_0 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \; : \; H(x,y) = 0\}$$

è data dai punti tali che valga almeno una delle due seguenti uguaglianze:

$$\begin{aligned} &(y+1)^2 - x^2 = 0, \\ &(y-1)^2 - x^2 = 0. \end{aligned}$$

La prima individua le due rette

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_1 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \; : \; y = -1 + x\}, \\ \mathcal{R}_2 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \; : \; y = -1 - x\}, \end{aligned}$$

mentre la seconda individua le due rette

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_3 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \; : \; y = 1 + x\}, \\ \mathcal{R}_4 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \; : \; y = 1 - x\}. \end{aligned}$$

Quindi

$$\Gamma_0 = \mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2 \cup \mathcal{R}_3 \cup \mathcal{R}_4.$$

Si noti che le 4 rette si intersecano in corrispondenza dei 4 punti d'equilibrio instabile; cfr. la Fig. 1.

Si ha

$$H(0,0) = 1, \qquad \lim_{x \to \pm\infty} H(x,0) = \lim_{y \to \pm\infty} H(0,y) = \infty, \qquad \lim_{a \to \pm\infty} H(a,a) = -\infty,$$

da cui si evince che la funzione $H(x,y)$ è positiva nelle regioni tratteggiate rapprentate in Fig. 1.

(2.3) *Parte II.* In particolare la funzione $H(x,y)$ è positiva nella regione chiusa $\mathcal{D}$ delimitata dalle 4 rette: quindi l'origine è un punto di massimo relativo per $H(x,y)$.

Se definiamo la funzione di Lyapunov

$$W(x,y) = H(0,0) - H(x,y) = 1 - H(x,y),$$

possiamo quindi applicare il teorema di Lyapunov; infatti preso comunque un intorno B dell'origine si ha

$$\begin{cases} W(0,0) = 0, \\ W(x,y) > 0 \quad \forall (x,y) \in B \setminus \{(0,0)\}, \\ \dot{W}(x,y) = -\dot{H}(x,y) = 0, \end{cases}$$

così che possiamo concludere che il punto $P_0 = (0,0)$ è un punto d'equilibrio stabile.

(2.4) *Parte II.* Per determinare i versi di percorrenza delle orbite che costituiscono la curva di livello Γ_0 si può ragionare come segue.

Lungo la retta $y = 1 + x$ si ha

$$\dot{x} = 8x(1+x),$$

quindi risulta $\dot{x} > 0$ se e solo se $x > 0$ oppure $x < -1$; lungo la retta $y = 1 - x$ si ha

$$\dot{x} = -8x(1-x),$$

quindi risulta $\dot{x} > 0$ se e solo se $x < 0$ oppure $x > 1$.

Per continuità si determinano i versi di percorrenza lungo le altre rette. Si hanno quindi i versi di percorrenza rappresentati dalle frecce in Fig. 2.

(2.5) Le altre curve di livello (e i rispettivi versi di percorrenza) si determinano per continuità; cfr. la Fig. 2. In particolare le traiettorie all'interno della regione $\mathcal{D}$ sono periodiche poiché $\mathcal{D}$ è racchiusa da una componente connessa di una curva di livello e contiene al suo interno un solo punto d'equilibrio, che è stabile.

(2.6) Le traiettorie periodiche si possono individuare attraverso la seguente condizione sui dati iniziali $(\bar{x}, \bar{y})$:

$$0 < H(\bar{x}, \bar{y}) < 1, \qquad \bar{x}^2 + \bar{y}^2 \leq 1.$$

Un modo alternativo per individuarli è il seguente:

$$0 < H(\bar{x}, \bar{y}) < 1, \qquad |\bar{x}| < 1, \qquad |\bar{y}| < 1.$$

tali dati iniziali sono quindi quelli che si trovano all'interno della regione $\mathcal{D}$ racchiusa dalle 4 rette (escluso il punto d'equilibrio P_0).

(2.7) Per qualsiasi traiettoria periodica si ha,

$$H(x, y) = y^4 - 2y^2 \left(x^2 + 1\right) + \left(1 + x^2\right)^2 = E,$$

dove $E \in (0, 1)$ e $|x|, |y| < 1$.

Possiamo quindi esprimere y in funzione di x risolvendo l'equazione di secondo grado in y^2 data da

$$y^4 - 2y^2 \left(x^2 + 1\right) + \left(x^2 - 1\right)^2 - E = 0.$$

Si ha quindi

$$y^2 = x^2 + 1 \pm \sqrt{\left(x^2 + 1\right)^2 - \left(x^2 - 1\right)^2 + E} = x^2 + 1 \pm \sqrt{4x^2 + E}.$$

Poiché si deve avere $|y| < 1$ sola la determinazione negativa può descrivere una traiettoria periodica: quindi

$$y^2 = x^2 + 1 - \sqrt{4x^2 + E},$$

da cui si ricava

$$y = y_{\pm}(x) = \pm\sqrt{x^2 + 1 - \sqrt{4x^2 + E}}.$$

La traiettoria periodica percorrerà un'orbita che sarà descritta dalla curva $y = y_+(x)$ nel semipiano superiore e dalla curva $y = y_-(x)$ nel semipiano inferiore; cfr. la Fig. 3.

Le due curve si incontrano nei punti $x = \pm x_0$ tali che $y_{\pm}(\pm x_0) = 0$. Quindi x_0 si trova determinando gli zeri della funzione

$$f(x) = x^2 + 1 - \sqrt{4x^2 + E}.$$

Tali zeri saranno quindi dati dai valori x tali che

$$x^2 + 1 = \sqrt{4x^2 + E},$$

i.e. tali che

$$x^4 + 1 + 2x^2 = 4x^2 + E,$$

da cui si ottiene

$$\left(x^2 - 1\right)^2 = E.$$

In conclusione gli zeri vanno determinati nell'insieme

$$\{x \in \mathbb{R} \; : \; |x| < 1, \qquad x^2 = \pm\sqrt{1 \pm E}\,\}.$$

Quindi sono i punti $x = \pm x_0$, con

$$x_0 = \sqrt{1 - \sqrt{E}}.$$

In conclusione lungo la curva $y_+(x)$ si ha

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= 4y_+(x)\left(y_+^2(x) - x^2 - 1\right) = \sqrt{x^2 + 1 - \sqrt{4x^2 + E}}\left(x^2 + 1 - \sqrt{4x^2 + E} - x^2 - 1\right) \\
&= -\sqrt{4x^2 + E}\sqrt{x^2 + 1 - \sqrt{4x^2 + E}}.
\end{aligned}$$

Poiché $y_-(x) = -y_+(x)$ si ha

$$-\int_{x_0}^{-x_0} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{4x^2 + E}\sqrt{x^2 + 1 - \sqrt{4x^2 + E}}} = \int_0^{T/2} \mathrm{d}t,$$

dove T denota il periodo della traiettoria (e si è tenuto conto del verso di percorrenza della curva!).

Quindi, tenendo conto del fatto che l'integrando è pari in x, si ottiene

$$\begin{aligned}
\frac{T}{2} &= \int_{-x_0}^{x_0} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{4x^2 + E}\sqrt{x^2 + 1 - \sqrt{4x^2 + E}}} \\
&= 2\int_0^{x_0} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{4x^2 + E}\sqrt{x^2 + 1 - \sqrt{4x^2 + E}}}.
\end{aligned}$$

In conclusione per ogni traiettoria periodica con dati iniziali $(\bar{x}, \bar{y})$ tali che $H(\bar{x}, \bar{y}) = E$, il periodo si può esprimere come integrale definito come

$$T = 4\int_0^{x_0} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{4x^2 + E}\sqrt{x^2 + 1 - \sqrt{4x^2 + E}}},$$

dove $x_0 = \sqrt{1 - \sqrt{E}}$.