Corso di laurea in Matematica

Sistemi dinamici – Primo Modulo

Prova d'esame 25-06-01

Esercizio 1. Si consideri il sistema di equazioni differenziali lineari

$$\dot{x} = Ax, \qquad x \in \mathbb{R}^2, \qquad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{pmatrix},$$

con condizioni iniziali $x(0) = (1, 1)$. Si trovi la soluzione $x(t)$.

Esercizio 2. Sia dato il sistema dinamico planare

$$\begin{cases} \dot{x} = 2y\left(2y^2 - x^6 - 1\right), \\ \dot{y} = 6x^5\left(y^2 - 1\right). \end{cases}$$

(2.1) Trovare una costante del moto $H(x, y)$ tale che $H(0, 0) = 0$.
(2.2) Determinare i punti d'equilibrio.
(2.3) Discuterne la stabilità.
(2.4) Determinare la curva di livello $H(x, y) = 0$ e discuterne il verso di percorrenza.
(2.5) Discutere qualitativamente le altre curve di livello e discuterne i versi di percorrenza.
(2.6) Determinare i dati iniziali che dànno origine a traiettorie periodiche.