Corso di laurea in Matematica

Sistemi dinamici – Primo Modulo

Prova d'esame del 25-06-01

CORREZIONE

Esercizio 1.

I Metodo

Il polinomio caratteristico dell'operatore lineare A è

$$p(\lambda) = (2-\lambda)\,(3-\lambda) - 6 = \lambda^2 - 5\lambda + 6 - 6 = \lambda\,(\lambda - 5)\,,$$

così che lo spettro di A è costituito dagli autovalori

$$\lambda_1 = 0, \qquad \lambda_2 = 5.$$

Abbiamo quindi due autovalori reali distinti: l'operatore A è dunque diagonalizzabile.

Cerchiamo una base $\{v_1, v_2\}$ in $\mathbb{R}^2$ costituita dagli autovettori di A: in tale base l'operatore rappresentato da A nella base standard sarà rappresentato dalla matrice diagonale

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Le componenti dell'autovettore v_1 si determinano cercando le soluzioni (x, y) non banali dell'equazione

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0,$$

che fornisce la relazione

$$2x + y = 0,$$

che, per esempio, ammette soluzione

$$v_1 = (1, -2)\,.$$

Le componenti dell'autovettore v_2 si determinano cercando le soluzioni (x, y) non banali dell'equazione

$$(A - 5\mathbb{1}) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 6 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0,$$

che fornisce la relazione

$$-3x + y = 0,$$

così che una possibile soluzione è

$$v_2 = (1, 3)\,.$$

In conclusione si ha

$$\begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 5 \end{cases} \qquad \rightarrow \qquad \begin{matrix} v_1 = (1, -2), \\ v_2 = (1, 3), \end{matrix}$$

Si ha quindi

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix}, \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix},$$

se $\{e_1, e_2\}$ è la base standard in cui l'operatore lineare che definisce il sistema dinamico è rappresentato dalla matrice A.

Siano y le coordinate nella base definita dagli autovettori $\{v_1, v_2\}$. Si ha allora

$$y = Qx, \qquad Q^{-1} = P^T.$$

Quindi

$$Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

così che $\det Q = 5$. Si ha quindi

$$Q = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},$$

come è immediato verificare.

Si può anche facilmente verificare che risulta

$$B = QAQ^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix},$$

come deve essere.

Nelle coordinate y il sistema diventa

$$\dot{y} = By, \qquad y \in \mathbb{R}^2, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix},$$

con condizioni iniziali $y(0) = Qx(0)$, *i.e.*

$$\begin{cases} y_1(0) = 2/5, \\ y_2(0) = 3/5; \end{cases}$$

la soluzione di tale sistema di equazioni si calcola immediatamente ed è data da

$$\begin{cases} y_1(t) = y_1(0) = 2/5, \\ y_2(t) = 3e^{5t}/5, \end{cases}$$

che, espressa nelle coordinate x, diventa $x(t) = Q^{-1}y(t)$: quindi si ottiene

$$\begin{aligned} x_1(t) &= y_1(t) + y_2(t) = \frac{1}{5}\left(2 + 3e^{5t}\right), \\ x_2(t) &= -2y_1(t) + 3y_2(t) = \frac{1}{5}\left(-4 + 9e^{5t}\right). \end{aligned}$$

II Metodo

Altrimenti, una volta determinati gli autovalori e gli autovettori di A, si può direttamente scrivere la soluzione nella forma

$$x(t) = e^{At}x(0),$$

dove

$$e^{At} = Q^{-1}e^{Bt}Q, \qquad e^{Bt} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{5t} \end{pmatrix}.$$

Si ha quindi

$$B = QAQ^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{5t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2e^{5t} & e^{5t} \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3+2e^{5t} & -1+e^{5t} \\ -6+6e^{5t} & 2+3e^{5t} \end{pmatrix},$$

così che

$$x(t) = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3+2e^{5t} & -1+e^{5t} \\ -6+6e^{5t} & 2+3e^{5t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2+3e^{5t} \\ -4+9e^{5t} \end{pmatrix}.$$

III Metodo

Trovato lo spettro di A, si cerca una soluzione della forma

$$x(t) = a + be^{5t},$$

con $a = (a_1, a_2)$ e $b = (b_1, b_2)$ da determinarsi imponenendo che $x(t)$ risolva l'equazione $\dot{x}(t) = Ax(t)$ e soddisfi la condizione iniziale $x(0) = (1, 1)$.

Poiché si ha

$$\dot{x}(t) = 5be^{5t},$$

l'equazione $\dot{x}(t) = Ax(t)$ dà

$$5b_1e^{5t} = (2a_1 + a_2) + (2b_1 + b_2)\, e^{5t},$$
$$5b_2e^{5t} = (6a_1 + 3a_2) + (6b_1 + 3b_2)\, e^{5t},$$

che implica le 2 equazioni

$$\begin{cases} 2a_1 + a_2 = 0, \\ 3b_1 - b_2 = 0. \end{cases}$$

Imponendo che siano soddisfatte le condizioni iniziali otteniamo inoltre le 2 condizioni

$$\begin{cases} a_1 + b_1 = 1, \\ a_2 + b_2 = 1. \end{cases}$$

Risolvendo il primo sistema si trovano quindi le relazioni

$$a_2 = -2a_1, \qquad b_2 = 3b_1,$$

che, inserite nel secondo sistema, dànno:

$$a = (a_1, a_2) = (2/5, -4/5), \qquad b = (b_1, b_2) = (3/5, 9/5),$$

In conclusione la soluzione è data da

$$x_1(t) = \frac{1}{5}\left(2 + 3e^{5t}\right),$$
$$x_2(t) = \frac{1}{5}\left(-4 + 9e^{5t}\right),$$

<u>Esercizio 2.</u>

(2.1) Si cerca la costante del moto $H(x, y)$ in modo tale che risulti

$$\begin{cases} \dot{x} = H_y \equiv \partial H/\partial y, \\ \dot{y} = -H_x \equiv \partial H/\partial x. \end{cases}$$

quindi

$$\begin{cases} 4y^3 - 2yx^6 - 2y = H_y \equiv \partial H/\partial y, \\ 6x^5y^2 - 6x^5 = -H_x \equiv \partial H/\partial x. \end{cases}$$

Si trova quindi, integrando la prima rispetto a y,

$$H(x,y) = y^4 - y^2x^6 - y^2 + c_1(x),$$

e, integrando la seconda rispetto a x,

$$H(x,y) = -y^2x^6 + x^6 + c_2(y),$$

dove $c_1(x)$ e $c_2(y)$ sono due funzioni da determinarsi imponendo che le due espressioni siano uguali. Si trova quindi

$$H(x,y) = y^4 - y^2x^6 - y^2 + x^6 + c = \left(y^2 - x^6\right)\left(y^2 - 1\right) + c,$$

dove c è una costante; imponendo che si abbia $H(0,0) = 0$ si trova $c = 0$, quindi

$$H(x,y) = \left(y^2 - x^6\right)\left(y^2 - 1\right).$$

(2.2) Si ha $\dot{x} = 0$ se $y = 0$ oppure $2y^2 - x^6 - 1 = 0$, e si ha $\dot{y} = 0$ se $x = 0$ oppure $y^2 - 1 = 0$.

Quindi, se $x = 0$ si deve avere $y = 0$ oppure $2y^2 = 1$, *i.e.* $y = \pm 1/\sqrt{2}$, mentre se $y = \pm 1$ si deve avere $1 - x^6 = 0$, *i.e.* $x = \pm 1$.

In conclusione si hanno i 7 punti d'equilibrio:

$$P_0 = (0,0), \qquad P_1 = (-1,-1), \qquad P_2 = (1,-1), \qquad P_3 = (1,1), \qquad P_4 = (-1,1),$$
$$P_5 = (0,-1/\sqrt{2}), \qquad P_6 = (1,1/\sqrt{2}),$$

(2.3) *Parte I.* Per discutere la stabilità dei punti d'equilibrio calcoliamo la matrice hessiana di H. Si ha

$$\mathcal{H}(x,y) = \begin{pmatrix} H_{xx}(x,y) & H_{xy}(x,y) \\ H_{yx}(x,y) & H_{yy}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30x^4(1-y^2) & -12x^5y \\ -12x^5y & 12y^2 - 2x^6 - 2 \end{pmatrix},$$

così che la matrice del sistema linearizzato nell'intorno di un punto d'equilibrio di coordinate (x,y) è data da

$$A(x,y) = \begin{pmatrix} H_{xy}(x,y) & H_{yy}(x,y) \\ -H_{xx}(x,y) & -H_{xy}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12x^5y & 12y^2 - 2x^6 - 2 \\ 30x^4(y^2-1) & 12x^5y \end{pmatrix}.$$

Quindi:

$$A(P_0) = A(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$
$$A(P_1) = A(-1,-1) = \begin{pmatrix} -12 & 8 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}, \qquad A(P_2) = A(1,-1) = \begin{pmatrix} 12 & 8 \\ 0 & -12 \end{pmatrix},$$
$$A(P_3) = A(1,1) = \begin{pmatrix} -12 & 8 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}, \qquad A(P_4) = A(-1,1) = \begin{pmatrix} 12 & 8 \\ 0 & -12 \end{pmatrix},$$
$$A(P_5) = A(0,1/\sqrt{2}) = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A(P_6) = A(0,1/\sqrt{2}) = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

così che si vede che gli autovalori sono $\lambda = \pm 12$ per P_1, P_2, P_3 e P_4, che quindi sono punti d'equilibrio instabile, mentre nulla si può concludere per gli altri punti d'equilibrio.

Per determinare la stabilità di P_0, P_5 e P_6 studiamo prima la curva di livello $H(x, y) = 0$.

(2.4) La curva di livello

$$\Gamma_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ H(x, y) = 0\}$$

è data dai punti tali che valga almeno una delle due seguenti uguaglianze:

$$\begin{aligned} & y^2 - x^6 = 0, \\ & y^2 - 1 = 0. \end{aligned}$$

La prima individua le due curve

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_1 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ y = x^3\}, \\ \mathcal{C}_2 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ y = -x^3\}, \end{aligned}$$

mentre la seconda individua le due rette

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_1 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ y = 1\}, \\ \mathcal{R}_2 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ y = -1\}. \end{aligned}$$

Quindi

$$\Gamma_0 = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2 \cup \mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2.$$

Si noti che le 4 curve si intersecano in corrispondenza dei punti P_0, P_1, P_2, P_3 e P_4.

Per determinare il verso di percorrenza delle curve si può ragionare come segue. Se $y = \pm 1$ si ottiene

$$\begin{cases} \dot{x} = \pm 2\left(1 - x^6\right), \\ \dot{y} = 0, \end{cases}$$

quindi se $y = 1$, si ha $\dot{x} > 0$ per $|x| < 1$ e $\dot{x} < 0$ per $|x| > 1$, mentre $y = -1$, si ha $\dot{x} > 0$ per $|x| > 1$ e $\dot{x} < 0$ per $|x| < 1$.

Sulle curva $\mathcal{C}_1$ il campo vettoriale è dato da

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x^3\left(x^6 - 1\right), \\ \dot{y} = 6x^5\left(x^6 - 1\right), \end{cases}$$

quindi $\dot{x} > 0$ e $\dot{y} > 0$ per $x > 1$ e per $x \in (-1, 0)$, mentre $\dot{x} < 0$ e $\dot{y} < 0$ per $x < -11$ e oer $x \in (0, 1)$; analogamente si discute il verso di percorrenza della curva $\mathcal{C}_2$, e si trova

$$\begin{cases} \dot{x} = \pm - 2x^3\left(x^6 - 1\right), \\ \dot{y} = 6x^5\left(x^6 - 1\right), \end{cases}$$

così che si ha $\dot{x} < 0$ e $\dot{y} > 0$ per $x > 1$ e per $x \in (-1, 0)$, mentre $\dot{x} > 0$ e $\dot{y} < 0$ per $x < -1$ e per $x \in (0, 1)$. La situazione è rappresentata in Fig. 1.

Si noti che si ha

$$H(0, 0) = 0, \qquad \lim_{x \to \pm\infty} H(x, 0) = \lim_{y \to \pm\infty} H(0, y) = \infty, \qquad \lim_{a \to \pm\infty} H(a, a) = -\infty,$$

da cui si evince che la funzione $H(x, y)$ è positiva nelle regioni $\mathcal{D}_1$ e $\mathcal{D}_2$ rappresentate in Fig. 1.

(2.3) *Parte II.* La funzione $H(x, y)$ è negativa nella regione chiusa $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2$ data da

$$\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ |x^3| < |y| < 1\},$$

quindi P_5 e P_6, essendo punti stazionari isolati, devono essere punti di minimo per $H(x,y)$.

Se definiamo la funzione di Lyapunov

$$W(x,y) = H(x,y) - H(0,\pm 1/\sqrt{2}) = H(x,y) + \frac{1}{4},$$

possiamo quindi applicare il teorema di Lyapunov; infatti preso comunque un intorno B del punto $(0,\pm 1\sqrt{2})$ si ha

$$\begin{cases} W(0,\pm 1\sqrt{2}) = 0, \\ W(x,y) > 0 \quad \forall (x,y) \in B \setminus \{(0,\pm 1\sqrt{2})\}, \\ \dot{W}(x,y) = -\dot{H}(x,y) = 0, \end{cases}$$

così che possiamo concludere che i punto P_5 e P_6 sono punti d'equilibrio stabile

Al contrario il punto d'equlibrio P_0 deve essee un punto d'equilibrio instabile: infatti lungo il tratto $x > 0$ della curva $\mathcal{C}_2$ e lungo il tratto $x < 0$ della curva $\mathcal{C}_1$ ci si allontana da P_0.

(2.5) Le altre curve di livello (e i rispettivi versi di percorrenza) si determinano per continuità; cfr. la Fig. 1. In particolare le traiettorie all'interno della regione $\mathcal{D}$ sono periodiche poiché ciascuna delle due regioni $\mathcal{D}_1$ e $\mathcal{D}_2$ è racchiusa da una componente connessa di una curva di livello e contiene al suo interno un solo punto d'equilibrio, che è stabile.

(2.6) Le traiettorie periodiche si possono individuare attraverso la seguente condizione sui dati iniziali $(\bar{x},\bar{y})$:

$$\frac{1}{4} < H(\bar{x},\bar{y}) < 0, \qquad |\bar{x}| < 1.$$