Corso di laurea in Matematica

Sistemi dinamici – Primo Modulo

PROVA D'ESAME 12-07-01

ESERCIZIO. Sia dato il sistema dinamico planare

$$\begin{cases} \dot{x} = 2y\left(2x^2y^2 - 1 - 4x^2\right)\left(x^2 - 4\right), \\ \dot{y} = -2x\left(2x^2y^2 - 1 - 4y^2\right)\left(y^2 - 4\right), \end{cases}$$

(1) Verificare che la funzione

$$H(x, y) = \left(x^2y^2 - 1\right)\left(x^2 - 4\right)\left(y^2 - 4\right)$$

è una costante del moto.
(2) Determinare i punti d'equilibrio.
(3) Discuterne la stabilità.
(4) Determinare la curva di livello $H(x, y) = 0$ e discuterne il verso di percorrenza.
(5) Discutere qualitativamente le altre curve di livello e discuterne i versi di percorrenza.
(6) Determinare i dati iniziali che dànno origine a traiettorie periodiche.
(7) Discutere qualitativamente il comportamento della soluzione con dati iniziali $(\bar{x}, \bar{y}) = (4, 1/4)$.
(8) Trovare esplicitamente la soluzione $(x(t), y(t))$ con i dati iniziali del punto precedente.