Corso di laurea in Matematica

Sistemi dinamici – Primo Modulo

Prova d'esame 03-09-01

<u>Esercizio.</u> Sia dato il sistema meccanico unidimensionale che descrive un punto materiale di massa $m = 1$ soggetto alla forza di energia potenziale

$$V(x) = 2\,(1 - \cos x) + \cos 2x,$$

con $x \in \mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi$.
(1) Si studi la funzione $V(x)$;
(2) Scrivere le equazioni del corrispondente sistema dinamico planare, e discuterne qualitatitamente le curve di livello dell'energia

$$H(x, y) = \frac{1}{2}y^2 + V(x), \qquad y = \dot{x},$$

nel piano (x, y);
(3) Determinare tutti i dati iniziali che dànno luogo a traiettorie periodiche;
(4) Dimostrare che la taiettoria con dato iniziale $(x, \dot{x}) = (-2\pi/3, 0)$ è periodica;
(5) Scrivere il periodo della traiettoria del punto precedente come integrale definito.