

ESERCIZIO 1. Enunciare e dimostrare il teorema di Ljapunov.

ESERCIZIO 2. Data la funzione  $H: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , definita da

$$H(x, y) = y(x^2 + y^2 - 2y),$$

si consideri il sistema dinamico planare

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial y}, \\ \dot{y} = -\frac{\partial H}{\partial x}. \end{cases}$$

(2.1) Determinare i punti d'equilibrio del sistema.

(2.2) Discuterne la stabilità.

(2.3) Studiare le curve di livello della funzione  $H(x, y)$ .

(2.4) Utilizzare i risultati precedenti per lo studio qualitativo delle le traiettorie del sistema.

ESERCIZIO 3. Sistemi rigidi: definizione e gradi di libertà.

ESERCIZIO 4. Dato un sistema di riferimento  $\kappa = Oxyz$  (sistema assoluto), si consideri un sistema di riferimento mobile  $K = O'\xi\eta\zeta$  (sistema relativo), la cui origine  $O'$  si muova nel piano  $(x, y)$  lungo una guida di equazione  $y = x^2$  in modo tale che la sua coordinata  $x$  al tempo  $t$  sia data da  $x(t) = t \cos t$ . L'asse  $\zeta$  si mantiene parallelo all'asse  $z$ , mentre l'asse  $\xi$  si mantiene sempre tangente alla guida; all'istante iniziale  $t = 0$  i due sistemi di riferimento coincidono.

Un punto materiale  $P$  di massa  $m = 1$  è fermo nel sistema  $K$  nel punto di coordinate  $(1, 0, 0)$ .

(4.1) Scrivere la trasformazione rigida  $D: K \rightarrow \kappa$  come composizione di una traslazione  $C$  con una rotazione  $B$ , *i.e.*  $D = C \circ B$ , e determinare  $C$  e  $B$ .

(4.2) Determinare la velocità assoluta  $\mathbf{v}$ .

(4.3) Determinare la velocità relativa  $\mathbf{v}'$ .

(4.4) Determinare la componente traslatoria della velocità di trascinamento  $\mathbf{v}_0$ .

(4.5) Determinare la componente rotatoria della velocità di trascinamento  $\mathbf{v}_T$ .