

ESERCIZIO 1. Data la funzione $H: \mathbb{T} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, con $\mathbb{T} = \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$, definita da

$$H(\theta, y) = y(y - \sin \theta),$$

si consideri il sistema dinamico planare

$$\begin{cases} \dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial y}, \\ \dot{y} = -\frac{\partial H}{\partial \theta}. \end{cases}$$

(1.1) Determinare i punti d'equilibrio del sistema.

(1.2) Discuterne la stabilità.

(1.3) Studiare le curve di livello della funzione $H(\vartheta, y)$.

(1.4) Utilizzare i risultati precedenti per lo studio qualitativo delle traiettorie del sistema.

(1.5) Verificare che la traiettoria con condizioni iniziali $(\bar{\vartheta}, \bar{y}) = (0, 1)$ è periodica, e scriverne il periodo come integrale definito.

ESERCIZIO 2. Discutere brevemente le leggi di Keplero in relazione al problema dei due corpi.

ESERCIZIO 3. Enunciare e dimostrare il teorema di esistenza e unicità per le equazioni differenziali ordinarie lineari.