Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2003/2004

FM1 - Equazioni differenziali e meccanica

Prova scritta (18-06-2004)

CORREZIONE

Esercizio 2.

2.1. Grafico dell'energia potenziale. Risulta

$$
\begin{aligned}
&V(x) = v(t) = t\,(t-1) = t^2 - t, \qquad t = e^{-2x^2}, \\
&V'(x) = v'(t)\,\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}, \qquad v'(t) = 2t - 1 = 4xt(1-2t), \qquad \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = -4xt, \\
&V''(x) = v''(t)\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}\right)^2 + v'(t)\left(-4t - 4x\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}\right) = 32x^2t^2 + 4t(1-2t)(1-4x^2).
\end{aligned}
$$

Inoltre $V(x)$ è una funzione pari, e si ha

$$
\lim_{x\to\pm\infty} V(x) = 0^-.
$$

Si ha $V'(x) = 0$ se $x = 0$ oppure se $t = 0$ oppure se $2t = 1$. Poiché $t = e^{-2x^2} > 0$ si hanno quindi tre punti stazionari: $x = 0$ e $x = \pm x_0$, dove x_0 è tale che

$$
e^{-2x_0^2} = \frac{1}{2} \Rightarrow x_0 = \sqrt{\frac{\log 2}{2}}.
$$

Quindi $x = 0$ è un punto di massimo, mentre $x = \pm x_0$ sono due punti di minimo. Infatti per $x = 0$ si ha $t = 1$ e quindi $V''(0) = -4$, mentre per $x = \pm x_0$ si ha $2t = 1$ e quindi $V''(x_0) = 16x_0^2 > 0$. Alternativamente le stesse conslusioni si possono dedurre dall'andamento della funzione a $\pm\infty$ e dal fatto che $V(x) \le 0$. Cfr. la Figura 1.

2.2. Punti d'equilibrio. I punti d'equilibrio, per il sistema dinamico associato

$$
\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -V'(x), \end{cases}
$$

sono della forma $(x, y) = (x_0, 0)$ dove $V'(x_0) = 0$.

Quindi i punti d'equilibrio sono tre: $P_0 = (0, 0)$ e $P_\pm = (\pm x_0, 0)$.

2.3. Stabilità dei punti d'equilibrio. I punti $P_\pm$ sono punti d'equilibrio stabile per il teorema di Dirichlet, in quanto punti di minimo isolati per l'energia potenziale.

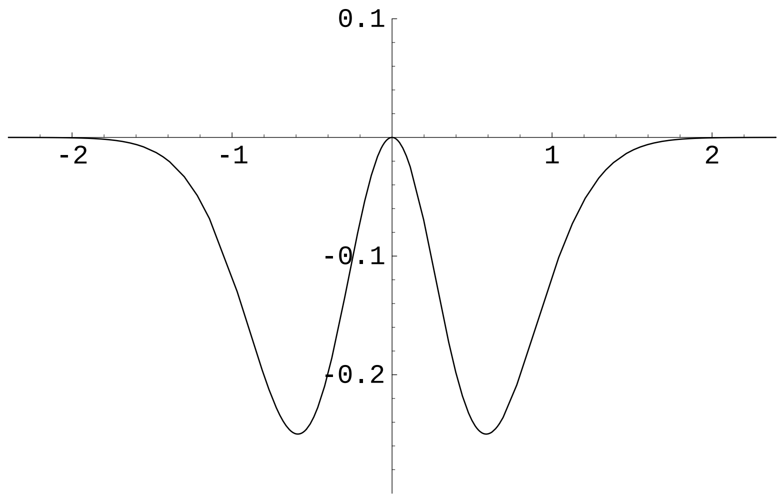

Figura 1. Grafico della funzione $V(x)$.

Il punto P_0 è un punto d'equilibrio instabile poiché è un punto di massimo: infatti gli autovalori della matrice del sistema linearizzato corrispondente sono $\pm\sqrt{-V''(0)}$. Alternativamente si può dedurre dallo studio delle curve di livello notando che ci sono direzioni lungo le quali ci si allontana dal punto d'equilibrio (cfr. la Figura 2 più avanti).

2.4. Analisi qualitativa. Le orbite si ricavano immediatamente dallo studio dell'energia potenziale, graficando al variare del valore dell'energia E la funzione

$$y = \pm\sqrt{2(E - V(x))}.$$

Si ottiene allora lo scenario rappresentato nella Figura 2; i versi di percorrenza sono da sinistra a destra nel semipiano $y > 0$ e da destra a sinistra nel semipiano $y < 0$.

Le curve di livello

$$\Gamma_E = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : H(x,y) = E\right\}$$

corrispondono a valori di energia $E \in [V(x_0), \infty)$. Per $E = V(x_0)$ la curva di livello contiene solo i punti d'equilibrio stabile $P_\pm$. Per $E = 0$ la curva di livello contiene il punto d'equilibrio instabile P_0 e altre quattro orbite aperte sulle quali le traiettorie sono asintotiche al punto d'equilibrio nel passato o nel futuro.

Le altre curve si possono ottenere per continuità: sono chiuse per $E < 0$ e aperte per $E > 0$.

Nel caso della curva Γ_E, con $E = 0$, si tenga conto che in $x = 0$ si ha $t = 1$ e quindi

$$V''(0) = 4\,(1 - 2) = -4 < 0,$$

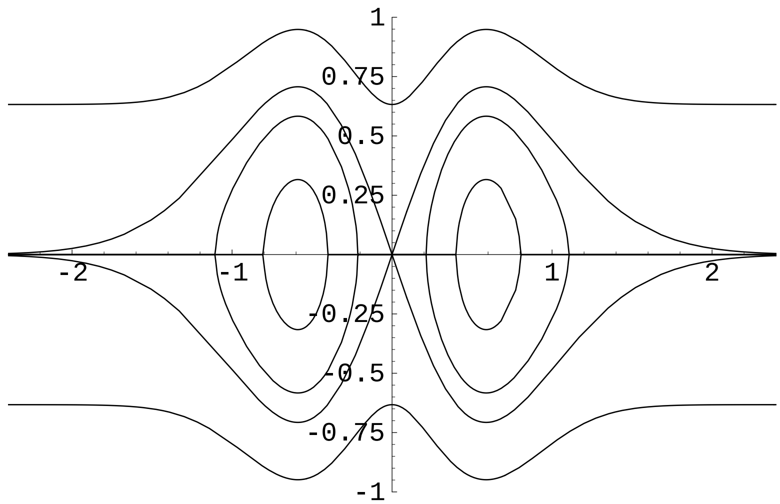

Figura 2. Analisi qualitativa del moto.

quindi la curva $y = y(x) = \sqrt{2(E - V(x))}$ ha tangente obliqua in $x = 0$ per $E = 0$.

2.5. Traiettorie periodiche. Tutte le traiettorie che giacciono sulle curve di livello Γ_E, con $E \in (V(x_0), 0)$, sono periodiche.

2.6. Traiettoria energia assegnata. La traiettoria corrispondente è periodica poiché $V(x_0) < -3/16 < 0$.

2.7. Periodo. Possiamo scrivere il periodo T come integrale definito

$$T = 2 \int_{x_-(E)}^{x_+(E)} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2\,(E - V(x))}},$$

dove $E = -3/16$ e $x_\pm(E)$ sono le due radici positive o negative dell'equazione $V(x) - E = 0$, cioè

$$V(x) = v(t) = t^2 - t = -\frac{3}{16} \Rightarrow t^2 - t + \frac{3}{16} = 0.$$

Quindi

$$t = \frac{1}{2}\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{3}{4}}\right) \Rightarrow t = \frac{1}{2}\left(1 \pm \frac{1}{2}\right) = \begin{cases} 1/4, \\ 3/4, \end{cases}$$

che implica le due soluzioni positive

$$x_-(E) = \sqrt{\frac{\log 4}{2}}, \qquad x_+(E) = \sqrt{\frac{\log(4/3)}{2}},$$

e le due soluzioni negative

$$x_-(E) = -\sqrt{\frac{\log(4/3)}{2}}, \qquad x_+(E) = -\sqrt{\frac{\log 4}{2}},$$

dove $E = -3/16$. Per simmetria le due traiettorie che corrispondono al valore di energia $E = -3/16$ hanno lo stesso periodo T. In conclusione si ha

$$T = 2\int_{\sqrt{(\log 4)/2}}^{\sqrt{(\log(4/3))/2}} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2\left(-\frac{3}{16} - e^{-2x^2}(e^{-2x^2}-1)\right)}}.$$